7. JEU D'ANNIVERSAIRE (cat. 71)

Pour son anniversaire, Corinne invite cinq amies : Anna, Béatrice, Danielle, Émilie et Francine.

Après le repas, elles décident de former des équipes de deux pour jouer aux cartes. Mais…

- Anna ne veut être ni avec Francine ni avec Béatrice,
- Béatrice ne veut pas faire équipe avec Émilie,
- Corinne demande de faire équipe avec Francine ou avec Béatrice,
- Danielle n'accepte de faire équipe qu'avec Béatrice ou avec Corinne,
- Francine ne veut faire équipe qu'avec Anna, Corinne ou Danielle.

Constituez les équipes de deux joueuses respectant les volontés de chacune.

Y a-t-il une seule façon de constituer les équipes ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Former à partir des 6 joueurs des couples de 2 en respectant 5 contraintes.

Analyse de la tâche

- Utiliser les indices et dresser des listes d'équipes possibles au fur et à mesure de la lecture, soit sous forme d'une liste soit sous la forme de listes distinctes selon les amies, soit sous forme de tableau à double entrée.
- 1er indice : les équipes possibles pour Anna sont A-E ; A-C; A-D
- 2e indice : les équipes possibles pour Béatrice sont B-C ; B-D ; B-F (pas B-A puisque Anna ne veut pas être avec Béatrice).
- 3e indice : les équipes pour Corinne sont C-F ou C-B. Donc Anna ne peut être avec Corinne (A-C).
- 4e indice : les équipes pour Danielle sont D-B ou D-C. Donc Anna ne peut être avec Danielle (A-D). Donc Anna est avec Émilie, et Corinne ne peut être avec Danielle, Danielle est donc avec Béatrice. Et Corinne est donc avec Francine.
- 5e indice (non indispensable): Francine fait équipe avec Corinne car Anna est déjà avec Émilie et Danielle n'a pas choisi Francine. Donc Béatrice fait équipe avec Danielle.

Ou : on choisit un couple, on regarde s'il est compatible avec les indices ; si oui on en choisit un autre et l'on continue. Sinon on teste un autre couple, etc…

Ou encore en écrivant toutes les possibilités (combinatoire) et en éliminant celles qui ne sont pas réalisables à partir de l'énoncé

A-B ;	A-C ;	A-D ;	A-E ;	A-F
	B-C ;	B-D ;	B-E ;	B-F
		C-D ;	C-E ;	C-F
			D-E ;	D-F
				E-F

Ou encore par représentations graphiques (flèches, ...)

Attribution des points

4 Réponse correcte (Anna et Émilie, Béatrice et Danielle, Corinne et Francine) avec explications de la démarche. (tableau, illustration) permettant de conclure qu'il n'y a qu'une seule solution.

3 Réponse correcte, avec explications insuffisantes, ne permettant pas de s'assurer de l'unicité de la solution (juste une vérification par exemple).

2 Réponse correcte sans aucune explication ou du genre : « nous avons fait des essais et nous avons trouvé »

ou deux équipes correctes avec explications de la démarche.

1 Début de démarche correcte avec détermination d'une seule équipe correcte

ou une ou deux équipes, sans explication...

0 Incompréhension du problème.

10. CLOUS ET FILS ÉLASTIQUES (cat. 71)

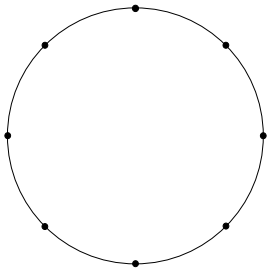


figure 1

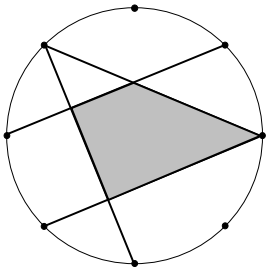


figure 2

Sur le bord d'un disque on a planté 8 clous. Entre deux clous qui se suivent, il y a toujours la même distance (voir figure 1).

On dispose de quatre fils élastiques qu'on peut tendre entre deux clous.

Le but est de former des rectangles (ou des carrés) ayant leurs côtés sur les quatre fils.

Jules a tendu les quatre fils (voir figure 2), mais il n'a pas atteint son but : il a obtenu un trapèze !

Trouvez tous les rectangles ou carrés différents que les quatre fils peuvent former.

Dessinez toutes les figures que vous avez trouvées. Si vous avez deux figures de mêmes dimensions, n'en dessinez qu'une seule !

(Utilisez les cercles ci-dessous pour dessiner vos rectangles ou carrés différents.)

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Construire des rectangles dont les côtés sont portés par des droites qui passent par des points d'un cercle parmi 8 répartis régulièrement.

Analyse de la tâche

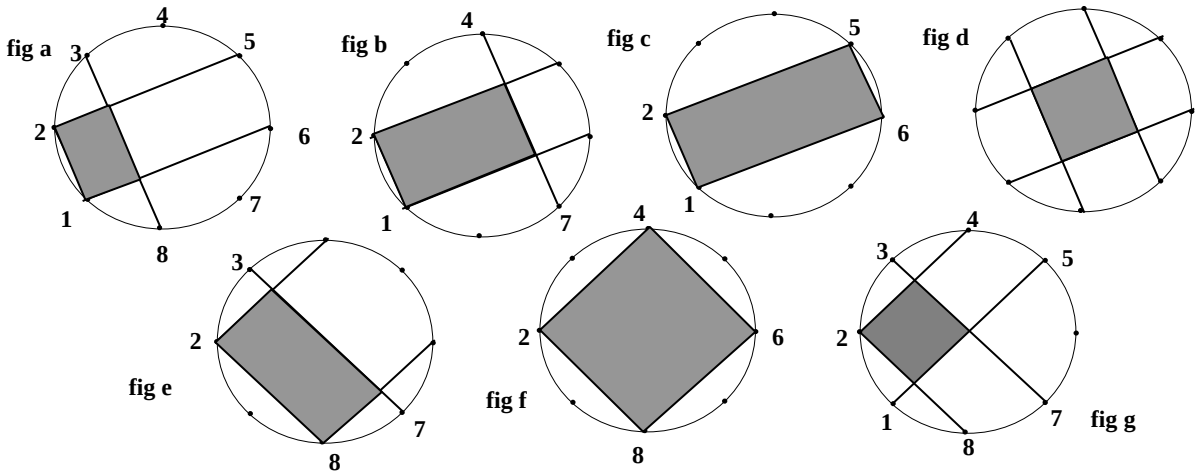
- Percevoir les positions des clous sur le cercle et imaginer les isométries qui déterminent les positions relatives des clous et des fils qui les relient. Par exemple un fil tendu entre deux clous voisins se retrouve sur un fil tendu sur les deux clous opposés après une rotation d'un demi-tour, ce qui permet de savoir que ces fils sont parallèles, des rotations d'un quart de tour font apparaître des côtés perpendiculaires, …
- Comprendre que pour construire les rectangles possibles, il est nécessaire de faire intervenir le parallélisme et l'isométrie des côtés opposés et la perpendicularité des côtés adjacents.
- Procéder par essais non organisés, avec le risque de ne pas trouver toutes les solutions.

Ou chercher une méthode systématique. Par exemple, un inventaire des clous supportant des fils parallèles :

- pour deux clous voisins de la figure a (1 et 2), il y a trois autres paires de clous qui déterminent la même direction (3 et 8), (4 et 7), (5 et 6), ce qui permet de déterminer les quatre rectangles des figures a, b, c et d, dont la longueur d'un côté est la distance de 1 à 2.
- pour deux clous séparés par un autre, (8 et 2) de la figure e, il y a deux autres paires de clous qui déterminent la même direction (3 et 7), (4 et 6), ce qui permet de déterminer les deux rectangles des figures e et f, dont la longueur d'un côté est la distance de 2 à 8. Avec une paire de côtés de cette direction, la combinaison avec les paires de perpendiculaires fait apparaître encore un autre rectangle (carré de la figure g) dont le côté vaut la moitié de la distance de 2 à 8.

Contrôler que les rectangles ainsi formés n'ont pas les mêmes dimensions. En particulier les carrés des figures d et g (car la distance de 1 à 2 est supérieure à la moitié de la distance de 8 à 2.)

Dessiner les sept solutions (dont trois sont des carrés).



Attribution des points

4 Les sept solutions correctes sans autre solution isométrique

3 Six solutions correctes sans autre solution isométrique
ou les sept solutions correctes avec une solution isométrique à l'une des précédentes

2 Quatre ou cinq solutions correctes sans autre solution isométrique
ou cinq ou six solutions correctes plus une solution isométrique à l'une des précédentes
ou les sept solutions correctes plus un quadrilatère qui n'est pas un rectangle

1 De une à trois solutions avec ou sans solutions isométriques
ou quelques solutions correctes et un quadrilatère qui n'est pas un rectangle.

0 Quadrilatères non rectangles ou incompréhension du problème

11. LA MAQUETTE (cat. 71, 81)

Dans la classe de Fabio, les élèves ont fait une maquette d'un petit village. Les maisons étaient construites avec des cubes de bois, tous les mêmes, qui ont été collés sur une base divisée en carrés. Pour obtenir des maisons à plusieurs étages, ils ont collé des cubes les uns sur les autres.

La maquette est maintenant sur le bureau. La figure A montre le dessin de la maquette vue du dessus. La figure B, au contraire, montre le dessin de la maquette comme la voit Fabio qui est assis sur son banc.

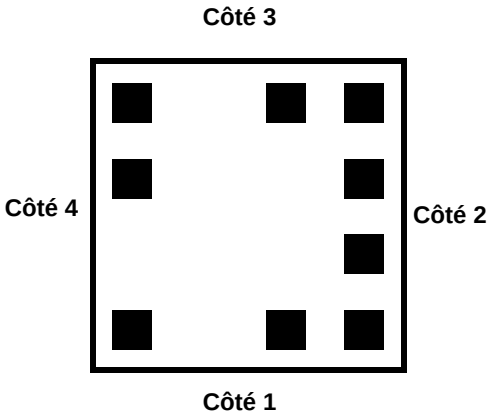


Fig. A. la maquette vue du dessus

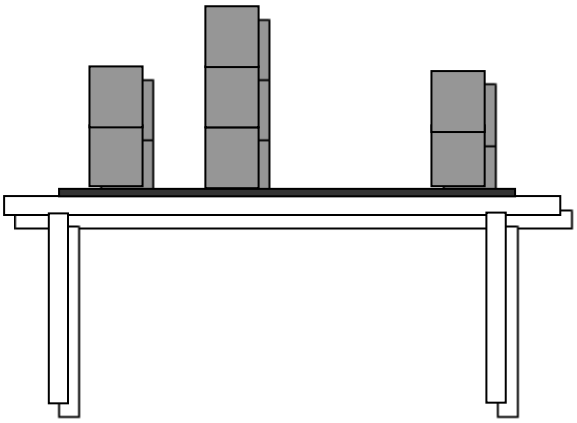


Fig B. la maquette vue par Fabio

Quel côté de la maquette est en face de Fabio ?

Quel est le nombre maximum de cubes qui ont été utilisés pour construire les maisons de la maquette ?

Donnez vos réponses et expliquez le raisonnement que vous avez fait.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Une construction avec des cubes est donnée par une vue « de dessus » et une de profil. Déterminer le point de vue et donner le nombre maximum de cubes qui ont été utilisés.

Analyse de la tâche

- Pour comprendre quel côté de la maquette est devant Fabio, il faut considérer la figure A et observer la maquette par la pensée en la regardant par chacun de ses côtés. On doit alors comparer ce que l'on imagine avec ce qui est montré dans la figure B. L'opération est plus facile si on tourne la feuille pour regarder la figure A successivement par chacun de ses côtés.
- En déduire que Fabio ne peut pas voir le CÔTÉ 1 de la maquette, sinon d'après la figure B, la maison isolée devrait être à droite et non à gauche. Il ne peut pas voir la maquette par le CÔTÉ 4 ni par le CÔTÉ 2, sinon il verrait aussi une maison dans l'espace vide de la figure B. Conclure que Fabio ne peut voir la maquette telle qu'elle apparaît dans la figure B que par le CÔTÉ 3.
- Pour estimer le nombre maximum de cubes utilisés dans la construction des maisons, il faut partir de la figure B. - Remarquer qu'à gauche on voit deux cubes, donc 2 est le nombre maximum de cubes pour chacune des maisons qui

se trouvent dans la colonne correspondante sur la figure A, vue du côté 3 (il y a 4 maisons, car toutes les cases sur cette colonne dans la figure A sont occupées).

- En se déplaçant vers la droite dans la figure B, on peut voir ensuite 3 cubes, donc 3 est le nombre maximum de cubes pour chacune des maisons qui se trouvent dans la colonne correspondante de la maquette (il y a 2 maisons, car 2 cases sont occupées dans cette colonne de la fig. A).
- Enfin on peut encore voir deux cubes à droite, donc 2 est le nombre maximum de cubes pour chacune des maisons qui se trouvent dans la colonne correspondante de la maquette (il y a 3 maisons, car trois cases sont occupées dans cette colonne de la figure A).

- En déduire que le nombre maximum de cubes est alors (2 x 4) + (3 x 2) + (2 x 3) = 20.

Attribution des points

4 Réponses correctes (CÔTÉ 3, nombre maximum de cubes : 20) avec l'explication du raisonnement

3 Réponses correctes avec explication peu claire
ou indication correcte du nombre maximal de cubes avec l'explication de la procédure

2 Réponses correctes sans explications

1 Seule la détermination du point de vue (CÔTÉ 3) est correcte

0 Incompréhension du problème

12. Sur le mur de l'École (cat. 71, 81)

Pour décorer un mur de l'école, quelques élèves ont préparé un modèle, formé de 10 quadrilatères sur papier quadrillé, comme sur la figure ci-dessous.

Luc dit :

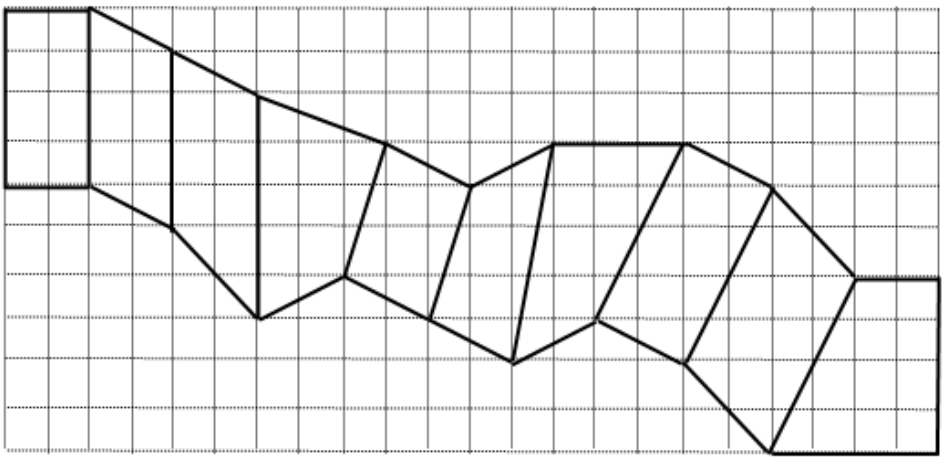
- « Pour le colorier, nous pourrions employer de la peinture rouge pour les rectangles, de la peinture verte pour les parallélogrammes qui ne sont pas rectangles et de la peinture jaune pour tous les autres quadrilatères. »

Les élèves d'une classe se répartissent les quadrilatères à colorier et Louis remarque :

- « J'ai à peindre le plus grand quadrilatère de tous ! »

Lucie rétorque :

- « Le mien est de la même grandeur que le tien. »



Coloriez le modèle comme Luc l'a proposé.

Quels sont les quadrilatères que Louis et Lucie ont à peindre ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine conceptuel

- Géométrie : distinction entre rectangle, parallélogramme non rectangle, trapèze et quadrilatère par leurs propriétés caractéristiques. Comparaison d'aires.

Tâche mathématique

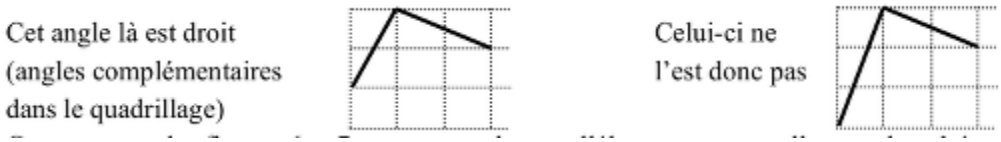
Identifier les rectangles, parallélogrammes non rectangles et autres parmi une chaîne de dix quadrilatères dont les sommets sont sur les nœuds d'un quadrillage et ayant des côtés communs puis déterminer les aires des deux plus grands.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

La tâche sur la reconnaissance des formes consiste à chaque fois, à vérifier la présence de côtés parallèles ou perpendiculaires.

Elle est simple pour le parallélisme, qu'on peut évaluer visuellement puis confirmer par un examen des côtés qui sont soit des segments du quadrillage ou des diagonales de rectangles du quadrillage, soit de 1 × 2, soit de 2 × 2 ou soit de 1 × 3.

Pour la perpendicularité la question ne se pose que pour les côtés adjacents qui sont des diagonales de rectangles. Dans la cinquième figure (numérotée de gauche à droite), il s'agit de rectangles différents, 1 × 2 et 1 × 3 dont les diagonales sont aussi différentes qui ne peuvent dont pas former un carré aux angles droits.



Dans la huitième figure, il s'agit de rectangles de 1 × 2 avec une rotation d'un quart de tour ou 90 degrés permettant de passer de l'un à l'autre, dont les diagonales sont donc perpendiculaires, comme les côtés correspondants. Dans la neuvième figure, il s'agit de rectangles différents 2 × 2 et 1 × 3 dont les diagonales ne peuvent être perpendiculaires.

Cette reconnaissance de perpendiculaires mobilise donc des savoirs sur les rotations de segments repérés dans le quadrillage.

La tâche du calcul des aires sur quadrillage est simple pour les figures décomposables en rectangles et demi-rectangles dont il suffit d'additionner les aires (exemple figure 4). D'autres ne permettent pas cette décomposition mais s'inscrivent dans un rectangle dont la partie extérieure à la figure se décompose en rectangles ou demi-rectangles; l'aire de la figure se calcule alors par soustractions successives à partir de celle du rectangle circonscrit (exemple figure 7).

Conclure que les figure 1 et 8 seront peintes en rouge car ce sont des rectangles, les trois parallélogrammes non rectangles 2, 5 et 9 en vert, les figures 3, 4, 6, 7 et 10 en jaune. Louis et Lucie peindront les quadrilatères 9 e 10, dont les aires mesurent 12 (en carrés du quadrillage)

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (1 et 8 en rouge, 2, 5 et 9 en vert, 3, 4, 6, 7 et 10 en jaune, 9 et 10 à peindre par Louis et Lucie) avec des explications claires pour les couleurs à partir des propriétés du rectangle et du parallélogramme, et une comparaison correcte des aires de 9 et 10

3 Réponse correcte avec explications complètes pour les couleurs et l'aire de 12 carreaux pour l'une des deux figures : le trapèze 10 ou le quadrilatère 9 (Louis ou Lucie)

ou réponse correcte pour les couleurs avec des explications incomplètes notamment pour les quadrilatères 6, 7 et 9 et avec réponse correcte pour les aires de Louis et Lucie

2 Réponse correcte pour les couleurs avec des explications claires

ou réponse correcte pour les couleurs avec des explications incomplètes notamment pour les quadrilatères 6, 7 et 9 et l'aire de 12 carreaux pour l'une des deux figures

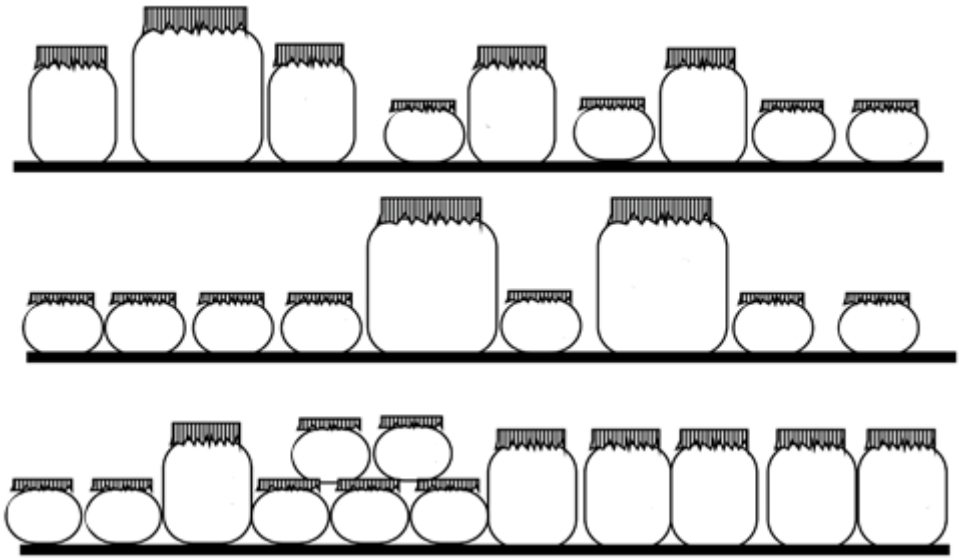
ou erreur dans les couleurs rouge ou vert mais avec réponse correcte pour les aires de Louis et Lucie

1 Deux ou trois erreurs dans les couleurs avec au moins une réponse pour Louis ou Lucie

0 Incompréhension du problème

13. LES POTS DE CONFITURE (cat. 71, 81, 91)

Maria a fait des confitures et a rempli des pots, petits, moyens et grands. Elle les a placés sur trois rayons :



Il y a exactement 5 kg de confiture sur chaque rayon.

Quels sont les poids des confitures dans un grand pot, un moyen et un petit ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres inconnus combinés en trois relations linéaires dont les valeurs sont données

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'avec la disposition donnée des pots sur les trois rayons, des substitutions peuvent être opérées pour faciliter les comparaisons.
- Retirer 7 petits pots de chacun des deux rayons inférieurs pour arriver à constater que 2 grands pots contiennent autant de confiture que 6 moyens, d'où 1 grand pot autant que 3 moyens.
- Par comparaison entre les deux rayons du haut et en remplaçant trois pots moyens par un grand dans le rayon supérieur, trouver qu'un pot moyen contient autant de confiture que 3 petits.
- Exprimer le contenu de chaque rayon avec 25 petits pots et en déduire qu'un petit pot contient 0,2 kg de confiture.
- En déduite qu'un pot moyen contient 3 x 0,2 = 0,6 kg de confiture et qu'un grand pot contient 3 x 0,6 = 1,8 kg de confiture.

Ou bien par une procédure algébrique (résolution d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues) :

- Écrire les équations algébriques représentées par la figure donnée :
- G + 4M + 4P = 5 ; 2G + 7P = 5 ; 6M + 7P = 5.
- Résoudre ce système : les deux dernières donnent 2G = 6M d'où M + 4P = 7P avec les deux premières donc 25P = 5.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète : 0,2 kg ; 0,6 kg ; 1,8 kg avec explications cohérentes

3 Réponse correcte et complète sans explications ou résolution partielle arrivant à l'une des équivalences :
1 moyen = 3 petits ou 1 grand = 3 moyens, avec explications.

2 Réponse avec une seule erreur de calcul et explications.

1 Début de recherche cohérente.

0 Incompréhension du problème.

14. LE CHIEN ET LE RENARD (cat. 71, 81, 91, 10)

Le chien Toby poursuit Red le renard dans les bois.

Il parcourt 85 mètres en 5 secondes tandis que Red parcourt 104 mètres en 8 secondes.

Quand la poursuite a commencé, la distance entre les deux était de 320 mètres.

Combien de temps faudra-t-il à Toby pour rattraper Red ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calcul de la distance à parcourir pour un mobile poursuivant un autre mobile parti devant, les vitesses respectives étant données.

Analyse de la tâche

- Pour les élèves qui ne maîtrisent pas le concept de vitesse, la procédure doit suivre l'écoulement du temps, seconde par seconde, après avoir transformé les données « 85 mètres en 5 secondes » et « 104 mètres en 8 secondes », respectivement en 17 et 13 mètres en une seconde, (ou de 40 secondes en 40 secondes, 40 étant le ppmc de 8 et 5). On peut alors élaborer une progression comparée des animaux et de leur écart. Par exemple dans un tableau :

temps (en secondes)	0	1	2	…	10	20	…	40	…	80
distance parcourue par le chien	0	17	34	…	170	340	…	680	…	1360
distance parcourue par le renard	0	13	26	…	130	260	…	520	…	1040
distance rattrapée par le chien	0	4	8	…	40	80	…	160	…	320

- Ou, se rendre compte, après avoir transformé les vitesses en m/s, que le chien rattrape 4 mètres par seconde et qu'il lui faudra 80 secondes (320 : 4) pour rattraper le renard, c'est-à-dire 1 minute et 20 secondes.
- Ou, algébriquement, les distances en mètres parcourues en x secondes par le chien ($17\,x$) et le renard ($13\,x$) conduisent à l'équation $320 = 17\,x - 13\,x$ et à sa solution $x = 80$ (en secondes) soit 1 minute et 20 secondes (les trois distances peuvent être représentés graphiquement).
- Solution plus experte : la relation entre vitesse, distance et temps sous la forme d = v t, permet de transcrire directement la différence des distances parcourues par le chien et le renard par l'équation :

  $(85/5)\,t - (104/8)\,t = 320)$

Attribution des points

4 Réponse correcte (80 s ou 1 min 20 s) avec des explications détaillées.

3 Réponse correcte avec des explications peu claires.

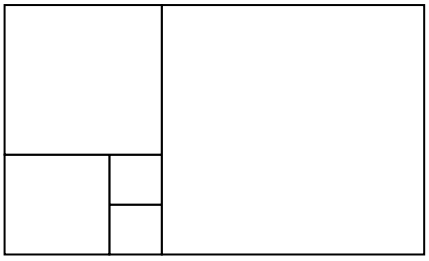
2 Réponse correcte sans explication.

1 Début de raisonnement correct (comparaison des deux vitesses soit par calcul soit par le début d'un tableau).

0 Incompréhension du problème.

15. LES CARRÉS D'ALEX ET FRANÇOIS (cat. 71, 81, 91, 10)

Alex et François considèrent la figure suivante représentant un grand rectangle formé de 5 carrés.



Alex affirme que s'il connaît le périmètre du rectangle, il peut calculer son aire et il donne un exemple avec un périmètre de 130 cm.

François prétend qu'il peut calculer le périmètre du rectangle à partir de son aire et il donne un exemple avec une aire de 1440 cm^2.

Quelle est l'aire calculée par Alex et quel est le périmètre obtenu par François.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle et carré.
- Grandeurs et mesures : mesures de périmètres et aires.

Tâche mathématique

Calculer l'aire d'un rectangle formé de cinq carrés (de côtés dans les rapports 1, 1, 2, 3, 5) connaissant son périmètre (130 cm), puis calculer le périmètre d'un rectangle semblable connaissant son aire (1440 cm^2).

Analyse de la tâche

- Observer que le rectangle est formé de 5 carrés : deux petits carrés dont les côtés peuvent être pris comme unité de longueur, un carré de côté double, un carré de côté triple et un grand carré de côté 5 unités.
- Remarquer que le rectangle a pour périmètre 2 × (5 + 8) = 26 (en unités) et qu'il contient 2 + 4 + 9 + 25 = 40 carrés unité.
- Puisque le périmètre d'Alex vaut 130 cm, il a pris 130/26 = 5 (en cm) pour côté d'un carré unité qui a donc une aire de 25 (en cm^2) et dans l'exemple d'Alex, le rectangle a une aire de 25 × 40 = 1000 (en cm^2).
- Puisque l'aire de François vaut 1440 (en cm^2), il a pris dans son exemple 1440/40 = 36(en cm^2) pour aire d'un carré unité et 6 cm comme unité de longueur. Le périmètre du rectangle qu'il doit donner est donc 26 × 6 = 156 cm.

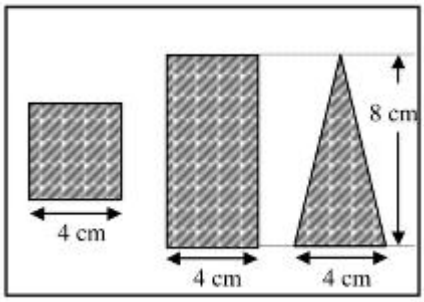
Attribution des points

4 Les deux réponses (1000 cm^2 et 156 cm) justifiées
3 Les deux réponses correctes sans explications ou explications confuses
2 Une réponse correcte et l'autre manquante ou erronée à cause d'une erreur de calcul
1 Début de raisonnement cohérent
0 Incompréhension du problème

16. JEU D'ENCASTREMENT (cat. 81, 91, 10)

Dimitri a reçu un jeu d'encastrement constitué de quelques pièces de bois : cubes, parallélépipèdes rectangles, pyramides, prismes qu'il faut entrer dans une grande boîte en bois par un des trous percés dans son couvercle.

On considère que chaque pièce bouche exactement le trou par lequel elle entre dans la boîte, sans laisser d'espace entre elle et les parois du trou.



Il y a des pièces qui ne peuvent entrer que par l'un des trous,
il y en a qui peuvent entrer par deux des trous et
il y en a une qui peut entrer par les trois trous.

Cette figure montre le couvercle, avec les trois trous :

- un carré de 4 cm de côté,

- un rectangle de 4 cm sur 8 cm,

- un triangle isocèle de 4 cm de base et 8 cm de hauteur.

Quelle est la forme de la pièce qui peut entrer par chacun des trois trous, en admettant qu'elle le bouche exactement lorsqu'elle y passe.

Dessinez un patron précis de cette pièce.

ANALYSE A PRIORI

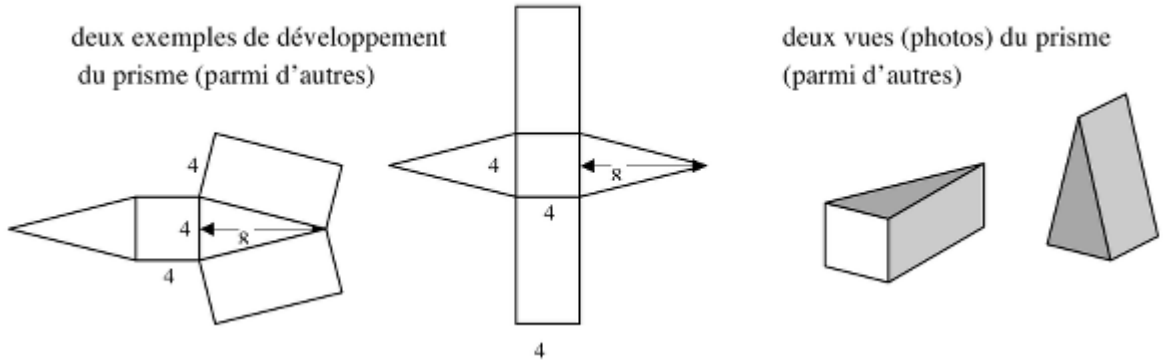
Domaine de connaissances
- Géométrie : polyèdres et développements, carré rectangle et triangle

Tâche mathématique
Déterminer un solide dont on connaît les dimensions des trois vues planes : un carré, un rectangle, un triangle isocèle

Analyse de la tâche
- Concevoir un polyèdre passant exactement par chacun des trous et penser par exemple au cube de 4 cm d'arête, à un parallélépipède dont une face est le rectangle donné et à un prisme droit dont la base est le triangle donné
- Imaginer ensuite un polyèdre passant par deux des trous, par exemple un prisme droit de base carrée de 8 cm de hauteur pour le carré et le rectangle, une pyramide régulière à base carrée de 8 cm de hauteur pour le carré et le triangle, ...
- Adapter mentalement un polyèdre passant par deux trous pour qu'il passe par le troisième. Par exemple, le prisme droit précédent peut être taillé sur deux faces rectangulaires opposées pour que les deux autres faces rectangulaires deviennent des triangles afin d'obtenir un prisme droit à base

triangulaire, de hauteur 4 cm ; ou la pyramide précédente peut être complétée sur deux faces opposées pour devenir le prisme droit à base triangulaire, de hauteur 4 cm.

- Dessiner le développement, et construire éventuellement le polyèdre, dont une face est un carré de 4 cm, deux faces sont des triangles isocèles de 8 cm de hauteur et les deux autres faces des rectangles de 4 cm et dont la largeur correspond à l'un des côtés isométriques du triangle (68 8,2 cm dont l'indication n'est pas nécessaire)



Attribution des points

4 Dessin correct du patron montrant l'isométrie des longueurs des rectangles et des côtés du triangle isocèle (on n'exige pas la vraie grandeur, un dessin à l'échelle convient aussi)

3 Le polyèdre est reconnu mais le patron n'est pas correct (par exemple : les côtés des rectangles et les côtés du triangle ne sont pas isométriques)

ou le polyèdre est reconnu mais il est dessiné par une vue (photo) reconnaissable ou désigné par son nom précis et complet : prisme droit dont la base est le triangle isocèle et de hauteur 4 cm

2 Le polyèdre est reconnu mais avec un patron incomplet (faces manquantes ou se superposant) ou dessiné par une vue (photo)

ou dessin correct d'un développement de polyèdre qui ne bouche que deux trous (parallélépipède- ou prisme droit - de 4 x 4 x 8, ou pyramide régulière de base carrée et de 8 cm de hauteur, etc.)

1 Dessin correct du développement d'un polyèdre qui ne bouche qu'un seul trou

0 Incompréhension du problème

17. L'ARTISAN (cat. 81, 91, 10)

Un artisan fabrique des objets en céramique dans son atelier. Aujourd'hui, il a préparé 13 vases qu'il désire vendre chacun à 24 €. Malheureusement, certains d'entre eux se sont fendus au cours de la cuisson. L'artisan décide alors de vendre ceux qui restent en augmentant le prix de chaque vase d'autant de fois 3 € qu'il y a de vases fendus.

En procédant ainsi, la vente des vases qui restent lui procurera le même montant qu'il aurait obtenu en vendant les 13 vases prévus à 24 €.

Combien y a-t-il de vases fendus ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine conceptuel

Arithmétique : multiplication et division
Algèbre : règle d'Arithmétique : multiplication et division
Algèbre : règle d'annulation d'un produit ; équation du second degré ; système

Tâche mathématique

Trouver un nombre tel que le produit de la différence entre 13 et ce nombre par la somme de 24 et du triple de ce nombre soit égal au produit de 13 et de 24, dans un contexte de compensation d'un manque à gagner.

Analyse de la tâche

- Comprendre que 312 € (= 13 × 24 €) est ce que l'artisan aurait gagné avec la vente de tous ses vases. C'est donc la somme qu'il veut tirer de la vente des vases qui restent non fendus.
- Se rendre compte que le nombre de vases non fendus est un diviseur de 312 inférieur à 13 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.
- Effectuer la division de 312 par chacun d'eux et considérer les cas dans lesquels les quotients sont des multiples de 24 augmentés d'un multiple de 3. C'est le cas des divisions par 1, 4 et 8. Écarter 1 parce que 312 : 1 = 312 et 312 – 24 = 288 = 3 × 96, mais 96 ne, peut pas être le nombre des vases fendus.

Écarter de même 4 parce que 312 : 4 = 78 et 78 – 24 = 54 = 3 × 18, mais ce cas n'est pas non plus acceptable car 18 > 13. Trouver enfin que 312 : 8 = 39 et que 39 – 24 = 15 = 3 × 5, 8 est donc le nombre des vases restés en bon état.

- En déduire que le nombre de vases fendus est 5 (13 – 8).

Ou : construire un tableau comme le suivant :

Vases fendus	Vases en bon état	Produit de la vente
1	12	12 (24 + 3) = 324
2	11	11 (24 + 3 × 2) = 330
3	10	10 (24 + 3 × 3) = 330
4	9	9 (24 + 3 × 4) = 324
5	8	8 (24 + 3 × 5) = **312**
6	7	7 (24 + 3 × 6) = 294
7	6	6 (24 + 3 × 7) = 270

- Observer que le produit de la vente diminue quand le nombre de vases fendus augmente et arrêter la construction du tableau. Conclure que le produit de la vente de 312 € est obtenu avec 5 vases fendus.

Ou : Noter x le nombre de vases fendus et écrire l'équation $(13 - x)(24 + 3x) = 312$. Cette équation du second degré s'écrit : $3x^2 - 15x = 0$, d'où $3x(x - 5) = 0$ qui, par la règle d'annulation d'un produit, donne $x = 0$ ou $x = 5$. Éliminant la solution $x = 0$, conclure que le nombre de vases fendus est 5.

Ou : Noter x le nombre de vases fendus et y celui des vases en bon état. Obtenir le système des deux équations : $x + y = 13$ et $y(24 + 3x) = 13 \times 24$. Par substitution, en déduire l'équation à deux inconnues : $y(24 + 3x) = (x + y) \times 24$, d'où $3xy = 24x$. Comme $x \neq 0$, on obtient $y = 8$ et comme $x + y = 13$, on a $x = 5$.

Attribution des points

4 Solution correcte (5) avec explication claire montrant l'unicité de la solution

3 Solution correcte avec explication sans référence à l'unicité de la solution

2 Solution erronée à cause d'une erreur de calcul, mais procédure correcte

1 Début de raisonnement correct (par exemple écriture de l'équation ou explication que le nombre des vases restés en bon état doit être un diviseur de 312)

ou réponse (5) sans aucune explication

0 Incompréhension du problème

18. LE MARATHON DE MAACH MATH (cat. 91, 10)

Michel et Philippe sont au départ du célèbre Marathon de MAACH MATH qui, cette année encore, se déroule à Math-City. Ils arborent fièrement leurs numéros de dossard.

- Le numéro de Michel est un nombre de quatre chiffres, tous différents.
- Le numéro de Philippe est aussi un nombre de quatre chiffres, les mêmes chiffres que ceux du numéro de Michel.
- La somme des nombres sur les dossards de Michel et de Philippe est 10 000.

Quels peuvent être les numéros des dossards de Michel et de Philippe ?

Donnez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : chiffre, nombre, notation positionnelle, décomposition d'un nombre en sommes de deux termes, algorithme de l'addition
- Logique : hypothèses et déductions à partir de l'analyse des cas possibles

Tâche mathématique

Trouver deux nombres formés des mêmes quatre chiffres, tous différents, tels que leur somme soit égale à 10 000

Analyse de la tâche

- Comprendre que la détermination des nombres de Michel et Philippe, qui ne se distinguent que par l'ordre de leurs quatre chiffres, nécessite de passer par l'addition des deux dont la somme est 10 000.
- Procéder systématiquement à partir de la colonne des unités et se rendre compte que les deux chiffres des unités ont pour somme, soit 10, soit 0 (0 + 0)
- Constater par quelques essais que les couples des chiffres des unités dont la somme est 10 : 1-9, 2-8, 3-7, 4-6, 5-5 entraînent un report de 1 sur les colonnes suivantes et que les chiffres des dizaines, centaines, milliers devraient être des couples dont la somme vaut 9. Mais ceci ne permet pas de trouver deux nombres avec les quatre mêmes chiffres dont la somme est 10 000.

Quelques exemples sont présentés ci-dessous : les deux premiers proposent le couple 6-4 pour les unités, qui exigent nécessairement dans deux autres colonnes les couples 4-5 et 3-6. On constate ainsi qu'on ne peut pas continuer sans enfreindre les consignes. Dans le troisième exemple, on part du couple 5-5 : il faut alors dans les colonnes des dizaines et des centaines le même couple de chiffre en ordre inversé dont la somme est 9 (ici 8 et 1, qui pourraient être remplacés par 7 et 2 ou 6 et 3). À ce point la seule possibilité pour la colonne des milliers est d'utiliser le couple 0-0, ce qui ne convient pas car les nombres sont de quatre chiffres, de somme 10 000.

/	3	**4**		**6**	+
/	**6**	5		**4**	=
1	0	0	0	0	

/		3	**4**	**6**	+
/		**6**	5	**4**	=
1	0	0	0	0	

/	0	1	8	**5**	+
/	0	8	1	**5**	=
	1	0	0	0	

- Se rendre compte que, dans le cas où les deux chiffres des unités sont « 0 », la seule manière de procéder, ainsi que nous l'avons observé ci-dessus, est de placer les « 5 » dans la colonne des dizaines et d'utiliser pour les colonnes des centaines et des milliers un même couple de chiffres dont la somme est 9, en ordre inversé : 8-1, 7-2, 6-3 (les seuls qui ne contiennent ni le « 0 » ni le « 5 »).
- Dresser finalement l'inventaire des possibilités : **1850 - 8150** ; **2750 - 7250**, **3650 - 6350**.

Attribution des points

4 Solution complète (les trois couples de nombres : 1850 - 8150 ; 2750 – 7250 ; 3650 - 6350) avec explication claire

3 Solution complète avec explication peu claire ou incomplète

2 Un ou deux des couples corrects trouvés avec explication claire

ou, les trois couples sans aucune explication

1 Une des solutions au moins, mais avec d'autres couples qui ne respectent pas une des conditions

0 Incompréhension du problème

19. ALADIN ET LE TRÉSOR D'ALI BABA (cat. 91, 10)

Aladin est sur les traces du trésor d'Ali Baba.

À un certain moment, il se trouve devant une bifurcation d'où partent deux sentiers dont l'un conduit à la grotte au trésor et l'autre dans le désert.

Chacun des deux sentiers est surveillé par un gardien dont on sait que l'un dit toujours la vérité et l'autre ment toujours et que chacun ne répond que par oui ou par non aux questions qu'on lui pose.

Aladin s'engage dans un des sentiers et demande à son gardien :

« Si je demandais à votre ami qui surveille l'autre sentier si c'est son sentier qui conduit au trésor, que me répondrait-il ? »

Le gardien lui répond.

Aladin réfléchit un moment puis il s'engage dans le sentier dont il est absolument sûr qu'il conduit au trésor.

Selon la réponse du gardien, Aladin doit-il poursuivre son chemin dans le sentier où il s'est déjà engagé ou doit-il revenir à la bifurcation et s'engager dans l'autre sentier ?

Expliquez le raisonnement d'Aladin de manière détaillée.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique, raisonnement hypothético-déductif

Tâche Mathématique

Pour chacune des deux réponses possibles à une question, oui ou non, faire un raisonnement par disjonction de cas selon que la réponse est fausse ou correcte.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il faudra tenir compte des deux réponses possibles du gardien
- Raisonner à partir d'hypothèses sur la réponse obtenue (oui ou non) et constater que l'on peut conclure en fonction de cette réponse :
  - Si la réponse est « oui », et si le gardien du sentier jaune est menteur, alors le gardien du sentier rouge, qui est celui qui dit la vérité, répondrait « non ». Il faut donc qu'Aladin continue sur le sentier jaune.
  - Si la réponse est « oui », et si le gardien du sentier jaune dit la vérité, alors le gardien du sentier rouge, qui est le menteur, dirait « oui ». Ce gardien ne serait donc pas sur le sentier du trésor et il faut donc qu'Aladin continue sur le sentier jaune.
  - Si la réponse est « non », et si le gardien du sentier jaune est le menteur, alors le gardien du sentier rouge, qui est celui qui dit la vérité, répondrait « oui », il faut donc qu'Aladin change de sentier.
  - Si la réponse est « non », et si le gardien du sentier jaune est celui qui dit la vérité, alors le gardien du sentier rouge, qui est le menteur, dirait « non », il faut donc qu'Aladin change de sentier.

- Se rendre compte que pour chacune des réponses « oui », Aladin doit continuer sur le sentier jaune et que, en cas de réponse « non, il doit changer de sentier.

Ou, comprendre que la réponse obtenue est le résultat d'un mensonge et d'une vérité, quel que soit leur ordre. Elle est donc un mensonge. Si c'est « oui », il faut comprendre « non » et rester sur le sentier jaune, si c'est « non », il faut comprendre « oui » et changer de sentier.

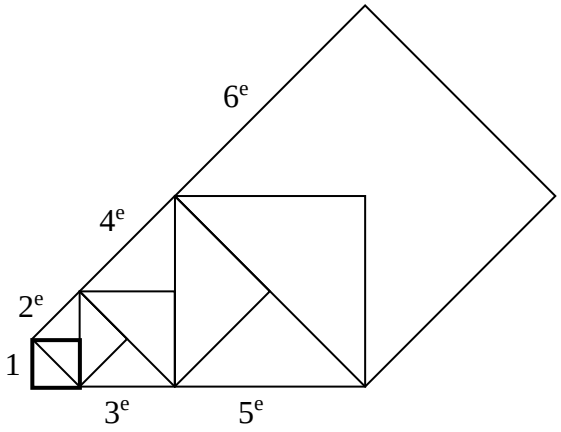
Attribution des points

4 Réponse correcte (oui : rester sur le sentier jaune, non : changer de sentier), avec une explication claire et complète.
3 Réponse correcte avec explications confuses.
2 Un raisonnement basé sur une hypothèse, seulement pour le « oui » ou seulement pour le « non » mais qui ne conclut pas.
1 Un début de raisonnement hypothético-déductif basé sur d'autres hypothèses.
0 Incompréhension du problème.

20. LA SAGA DES CARRÉS (CAT. 10)

Charles s'amuse à dessiner des carrés.

À partir d'un carré de 1 cm de côté, il dessine un deuxième carré dont un côté est confondu avec une des diagonales du précédent, un troisième avec un côté confondu avec la diagonale du deuxième, et ainsi de suite. Cette figure montre les six premiers carrés dessinés par Charles.



Quelle est la longueur du côté du onzième carré que Charles a pu dessiner ?

Quelle serait la longueur du côté du centième carré, s'il pouvait le dessiner ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Dans une succession de carrés, trouver une régularité dans la suite des longueurs des côtés et calculer les longueurs du onzième et du centième carré.

Analyse de la tâche

- Observer comment sont formés les carrés successifs : le premier, le troisième, le cinquième ..., ceux d'ordre impair, sont disposés l'un à côté de l'autre « horizontalement » comme le deuxième, le quatrième ... ceux d'ordre pair, qui eux disposés l'un à côté de l'autre mais en « obliquement »
- Calculer la longueur de la diagonale du premier carré – qui est la longueur du côté du 2e carré et trouver $\sqrt{2}$ (en cm) par le théorème de Pythagore ou en se rappelant la relation entre côté (c) et diagonale (d) d'un carré : $d = c\sqrt{2}$.
- Calculer la longueur du côté du troisième carré, soit par Pythagore, soit par la relation $d = c\sqrt{2}$ (qui conduit à $c_2 = d_1 = c_1\sqrt{2}$ et $c_3 = d_2 = c_2\sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, soit par un quadrillage de la figure, dont l'unité est le premier carré, pour s'apercevoir que le troisième carré est constitué de 4 carrés de côté 1 cm et par conséquent a un côté qui est le double du premier carré : 2.
- Calculer (éventuellement) la longueur du côté du quatrième carré comme précédemment soit en multipliant le côté du précédent par $\sqrt{2}$, soit par quadrillage en constatant qu'il est composé de 8 carrés unités et que son côté est, en cm, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, soit en doublant celui du deuxième carré.
- Organiser ensuite les résultats jusqu'au 11e carré et constater que son côté mesure 32, en cm. Par exemple :

carré n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
côté, en cm	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	8	$8\sqrt{2}$	16	$16\sqrt{2}$	32

- Se rendre compte que, pour aller au-delà du 11e carré, il devient nécessaire de faire un lien entre le numéro du carré et les exposants des mesures des côtés écrits sous forme de puissances de 2. (3e ligne dans l'exemple suivant) :

carré n°	...	7	8	9	10	11	12	13	…	99	100

côté, en cm	…	8	$8\sqrt{2}$	16	$16\sqrt{2}$	32	$32\sqrt{2}$	64	…	2^{49}	$2^{49}\sqrt{2}$
côtés « exp »	…	2^{3}	$2^{3}\sqrt{2}$	2^{4}	$2^{4}\sqrt{2}$	2^{5}	$2^{5}\sqrt{2}$	2^{6}	…	2^{49}	$2^{49}\sqrt{2}$

on y remarque que ces exposants valent la moitié du « numéro d'ordre du carré – 1 » : pour 11, (11 - 1)/2 = 5, pour 99, (99 - 1)/2 = 49.

- Obtenir ainsi la valeur du côté du 99e carré : 2^{49} **et celle de 100e** carré : $2^{49}\sqrt{2}$

Ou : comprendre que les mesures des côtés des carrés d'ordre « impair » sont en progression géométrique de raison 2, avec 1 comme premier terme (et que le côté d'un carré « impair » de rang 2k + 1 est une puissance de 2 d'exposant k). Le côté du onzième carré, cinquième terme de la progression sera donc $2^5 = 32$.

- Comprendre, de même, que les mesures des côtés des carrés d'ordre « pair » sont en progression géométrique de raison 2, avec $\sqrt{2}$ (diagonale du carré de côté 1) comme premier terme (et que le côté d'un carré « pair » de rang 2k est le produit de $\sqrt{2}$ par une puissance de 2 d'exposant k - 1) et calculer la longueur du côté du centième carré : $\sqrt{2}$ ⍰ 2^{49} ⍰ 7,960 ⍰ 10^{14} cm, soit environ 7 milliards 960 millions de kilomètres (ce dernier calcul n'est pas attendu des élèves de niveaux 8, 9 ou 10 qui ne disposeraient pas d'une calculatrice scientifique).

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (32 cm et $\sqrt{2}$ ⍰ 2^{49} cm) avec des explications claires (description de la procédure, tableau…). On admettra comme réponse correcte pour la 100e figure l'écriture : ⍰ 7,960 ⍰ 10^{14} ou du genre 7,961... ⍰ 10^{14})

3 Les deux réponses correctes sans explication ou sans l'explicitation des diverses étapes qui conduisent à la solution
ou réponse correcte (32 ou 25) pour le 11e carré et la réponse 7,961...E14 (copie de l'affichage d'une calculatrice) pour le 100e carré ou encore la réponse 2

2 La première réponse correcte sans explication
ou la première réponse correcte avec explications incomplètes et un début de recherche pour la deuxième question

1 La première réponse correcte sans aucune explication

0 Incompréhension du problème.