A. CINQ AMIS À LA PIZZERIA (Cat. 72)

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Associer un type de pizza parmi quatre à chaque personne d'un groupe de cinq en respectant quatre contraintes dont deux sont formulées par une négation.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que le nombre d'amis est différent du nombre de types de pizzas.
- Comprendre que s'il y a quatre types de pizza et qu'il y a cinq amis, personne n'a choisi le même type de pizza que Bruno et Elsa et que les trois autres amis ont choisi chacun un type de pizza différent.
- La troisième information permet d'attribuer la capricciosa à Camille, ainsi il reste trois types de pizza, champignons, napolitaine et margherita, à attribuer à quatre personnes. La première information exclut d'attribuer la pizza aux champignons à Dino et Alice, ce qui signifie que Bruno et Alice ont commandé une pizza aux champignons.
- Il ne reste plus alors qu'à attribuer les pizzas napolitaine et margherita. La dernière information conduit à conclure que Dino a commandé la napolitaine et Alice la margherita.

Ou

- Partir de la dernière information et déduire que Dino, puisqu'il n'a pas commandé une margherita, ni une pizza aux champignons (première information), ni une capricciosa (troisième information), a commandé une napolitaine.
- Alice n'a pas commandé une pizza aux champignons, ni une capricciosa, ni une napolitaine. Elle a donc commandé une margherita.
- En déduire que Bruno et Elsa ont tous deux commandé une pizza aux champignons.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Alice a commandé une margherita, Bruno et Elsa ont commandé une pizza aux champignons, Dino une napolitaine) avec description des déductions effectuées pour arriver à la réponse (sous forme de texte ou au moyen d'un schéma associant à chacun les types de pizza possibles et en justifiant les associations qui sont successivement écartées...)

3 Réponse correcte avec explication peu claire de la procédure

Ou réponse correcte avec seulement la vérification

2 Réponse correcte sans explication

Ou réponse correcte pour Bruno et Elsa, mais inversion entre les types de pizza de Dino et Alice

1 Absence de réponse mais attribution correcte à un ou deux des amis, autre que Camille.

Ou une déduction correcte faite à partir des informations de l'énoncé (par exemple Bruno et Elsa n'ont pas pris une capricciosa parce que…)

0 Incompréhension du problème

Ou attribution correcte uniquement pour Camille.

B. LANCER DE FLÉCHETTES (Cat. 72, 82)

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver toutes les décompositions de 51 en somme de 5 termes choisi parmi 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 et 32.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on dispose de cinq fléchettes qu'on lance dans la cible, que certaines fléchettes peuvent ne pas atteindre la cible et que dans une même zone il peut y avoir plusieurs fléchettes.
- Comprendre qu'une fléchette rapporte le nombre de points inscrit dans la zone dans laquelle elle touche la cible et qu'une fléchette qui ne touche pas la cible marque 0 point.
- Comprendre que pour gagner le gros ours, il faut totaliser exactement 51 points et que 51 doit être obtenu en additionnant 5 termes pris parmi 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 et 32, qu'un même nombre peut être présent plusieurs fois dans la somme.
- La difficulté consiste à tenir compte des conditions : la somme doit comporter 5 termes, pas nécessairement tous différents et dont certains peuvent être 0.
- Effectuer des essais inorganisés : choisir 5 nombres, en faire la somme et la comparer à 51. Cette stratégie a peu de chance d'aboutir à l'ensemble des solutions, mais elle peut être une stratégie d'entrée qui permet de prendre conscience qu'un des deux nombres 32 et 16 au moins doit être présent.
- Effectuer des essais organisés. Par exemple en recherchant les solutions qui contiennent le nombre 32. Il faut lui ajouter 19 points et donc chercher comment obtenir 19 avec 4 nombres pris parmi 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16.
  Avec 16, on trouve 16 + 2 + 1 + 0 = 19 et 16 + 1 + 1 + 1 = 19. Sans 16, on ne trouve que 8 + 8 + 2 + 1. La décomposition 8 + 8 + 1 + 1 + 1 ne convient pas car 6 nombres seraient alors utilisés pour obtenir 51.
  Poursuivre en cherchant les solutions qui ne contiennent pas 32. Avec 16, on trouve 16 + 16 + 16 + 2 + 1
  Chercher ensuite des solutions qui ne contiennent ni 32, ni 16. En additionnant cinq 8, on obtient 40, qui est inférieur à 51. Il n'y a donc pas d'autres solutions.
- Remarque : tous les nombres autres que 1 étant pair, des élèves peuvent remarquer que leur somme est paire et que 1 doit être obligatoirement présent

Attribution des points

4 Réponse correcte (les 4 possibilités : 32, 16, 2, 1, 0 / 32, 16, 1, 1, 1 / 32, 8, 8, 2, 1 / 16, 16, 16, 2, 1 ou 1 fléchette dans la zone 32, 1 fléchette dans la zone 16, 1 fléchette dans la zone 2, 1 fléchette dans la zone 1et une fléchette qui n'a pas touché la cible, de même pour les autres cas), avec les sommes de 5 termes correspondantes ou de 4 termes si le cinquième est 0

3 Réponse avec seulement la présence des 4 sommes de 5 termes ou encore de 4 termes si le cinquième est 0

Ou seulement les 4 possibilités sans que les sommes correspondantes soient écrites

Ou 3 des possibilités avec les sommes correspondantes, sans autre somme ou proposition erronée

2 Les 4 possibilités ou seulement les 4 sommes avec au plus une autre proposition erronée

Ou 3 des possibilités ou seulement les 3 sommes, sans autre somme ou proposition erronée

1 3 ou 2 des possibilités ou seulement les sommes avec au plus une autre somme ou proposition erronée

Ou 1 des possibilités ou seulement la somme, sans autre somme ou proposition erronée

0 Incompréhension du problème

C. LES BONDS DE MIRKA (Cat. 72, 82, 92)

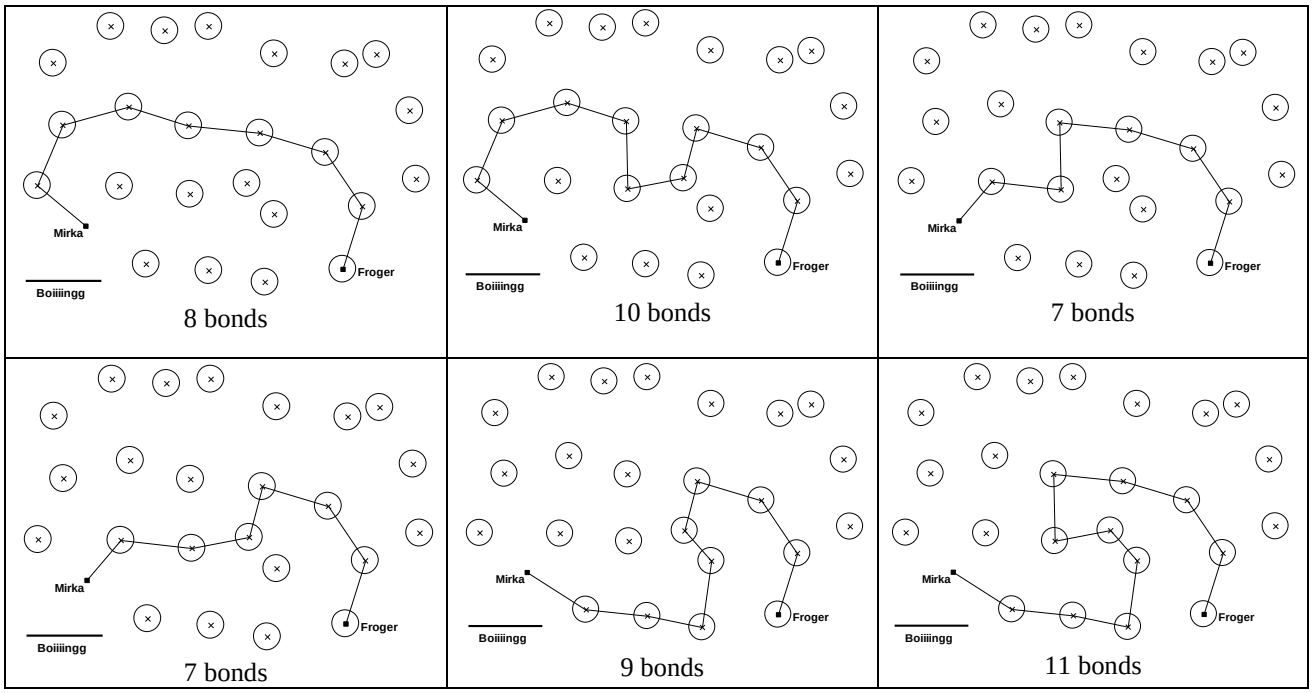
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

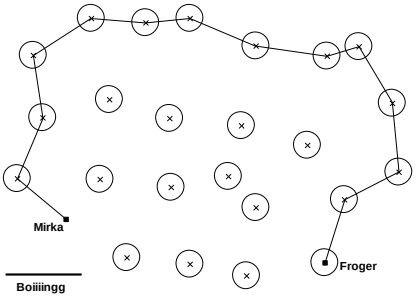
Identifier les différentes lignes brisées, construites en reliant des points, dont le nombre de segments est inférieur ou égal à 12 et dont la longueur de chaque segment est inférieure ou égale à celle d'un segment donné.

Analyse de la tâche

- Comprendre que deux points consécutifs d'un chemin ne doivent pas être distants de plus d'une longueur fixée et donc comprendre que la grenouille peut faire des bonds d'une longueur inférieure ou égale à cette longueur fixée.
- Comprendre qu'un chemin emprunté par la grenouille doit comporter au plus 12 bonds.
- Chercher entre quels nénuphars peut sauter la grenouille. Pour cela, mesurer les distances séparant deux points voisins ou prendre l'écartement de compas entre deux points voisins, les comparer à la longueur maximale d'un bond.
- A partir de l'emplacement de Mirka (ou de celui de Froger), chercher quelles sont les lignes brisées constituées de segments d'une longueur inférieure ou égale à celle d'un boiiiingg qui peuvent être tracées pour atteindre l'emplacement de Froger (ou de Mirka). Eliminer celles qui comportent plus de 12 segments.
- Tracer les chemins sur les supports fournis.
- Les six solutions sont :



- D'autres chemins respectent la condition sur la longueur de chaque bond mais pas sur le nombre de bonds, comme par exemple celui ci-dessous qui nécessite 13bonds :



Attribution des points

4 Réponse correcte (les 6 chemins clairement tracés), sans autre chemin erroné

3 De 4 à 5 chemins, avec dessins corrects, sans autre chemin erroné

Ou les 6 chemins, avec dessins corrects mais avec présence d'un autre chemin erroné

2 2 ou 3 chemins, avec dessins corrects, sans autre chemin erroné
Ou de 4 à 5 chemins, avec dessins corrects mais avec présence d'un ou deux autres chemins erronés
Ou 6 chemins, avec dessins corrects, mais avec présence de deux ou trois autres chemins erronés

1 Au moins 1 chemin avec dessin correct, avec ou non présence d'autres chemins erronés

0 Incompréhension du problème

D. TROIS AMIS ET LEURS MAISONS (Cat. 72, 82, 92)

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver 3 nombres proportionnels à 1, 2, 3, dont le plus grand est compris entre 50 et 100, dont deux sont de même parité et dont tous les chiffres qui les composent sont différents.

Analyse de la tâche

- Comprendre que, si on connaît le numéro de la maison d'André, on trouve les numéros des maisons des deux autres amis en divisant ce nombre une fois par 2 et une fois par 3.
- Commencer par des essais, en choisissant pour la maison d'André un nombre compris entre 50 et 100 et essayer de le diviser par 2 et par 3 ; se rendre compte que le numéro d'André doit être pair, c'est-à-dire multiple de 2, ainsi que multiple de 3, donc multiple de 6.
- Comprendre qu'il faut procéder systématiquement à partir des numéros possibles de la maison d'André. Par exemple, écrire dans l'ordre tous les nombres pairs compris entre 50 et 100, puis ne garder que ceux qui sont également des multiples de 3 et écrire pour chacun de ces nombres sa moitié et son tiers ; ou considérer immédiatement les multiples de 6 et procéder comme ci-dessus. Puis obtenir les triplets suivants :
  54 – 27 – 18 ; 60 – 30 – 20 ; 66 – 33 – 22 ; 72 – 36 – 24 ; 78 – 39 – 26 ; 84 – 42 – 28 ; 90 – 45 – 30 ; 96 – 48 – 32
- Eliminer les triplets qui ne satisfont pas les conditions indiquées dans l'énoncé : ils ceux composés de trois nombres pairs et / ou il y a au moins un chiffre répété. Il ne reste que deux triplets, 54 – 27 – 18 et 78 – 39 – 26, qui respectent toutes les conditions.
- Attribuer les numéros aux maisons des trois amis pour les deux possibilités trouvées, en respectant les conditions indiquées dans le texte : n° 54 André, n° 27 Charles et n° 18 Bruno, ou n° 78 André, n° 39 Charles et n° 26 Bruno.

Attribution des points

4 Réponse correcte (n° 54 André, n° 27 Charles, n°18 Bruno, ou n° 78 André, n° 39 Charles, n° 26 Bruno ou André peut habiter au 54 ou 78, Charles au 27 ou 39 et Bruno au 18 ou 26) avec description correcte et complète de la procédure (indication des triplets de nombres à partir des nombres possibles pour André et raison des éliminations qui conduisent à ne conserver que les deux triplets)

3 Réponse correcte avec description incomplète de la procédure ou uniquement une vérification

Ou les deux triplets sont corrects avec description claire de la procédure, mais les maisons de Charles et Bruno sont interverties ou les numéros des maisons de Charles et Bruno sont exacts mais les prénoms des deux amis ne sont pas indiqués

Ou réponse correcte avec description correcte et complète de la procédure, mais sans indication de qui habite quelle maison

2 Réponse correcte sans description de la procédure ou uniquement la vérification

Ou présence en plus des deux triplets corrects, d'un ou deux triplets erronés comportant un chiffre répété ou ne comportant que des nombres pairs (non prise en compte de la différence de parité des numéros des maisons de chaque côté de la rue) avec une description, même incomplète, de la procédure

Ou un seul triplet correct sans autre triplet erroné, avec description complète ou partielle de la procédure.

1 Début de recherche correct (par exemple : essais de division par 2 et par 3 du nombre choisi pour André mais sans aboutir)

Ou un seul triplet correct, avec ou sans triplet erroné, sans description de la procédure

0 Incompréhension du problème

E. CHAÎNE DE POLYGONES (Cat. 72, 82, 92)

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le suivant du denier terme de la suite des premiers entiers naturels dont la somme est le dernier nombre à être inférieur à 2020, dans le contexte d'une chaîne de polygones de 3, 4, 5, 6 …. côtés.

Analyse de la tâche

- Comprendre comment se construit la chaîne et les caractéristiques des polygones qui la composent : chacun a un côté de plus que le précédent en partant de 3 : 4 ; 5 ; 6 ; …
- Une première façon de s'approprier le problème consiste simplement à compter les segments sur la figure et voir que pour le 6e polygone (à 8 côtés) on arrive à 28 segments : 3, 6, 10, 15, 21, 28
- Observer que pour construire le septième polygone (à 9 côtés), on ajoute 8 segments aux 28 segments déjà tracés (28 + 8 = 36) et ainsi de suite. À chaque fois on ajoute le nombre suivant de celui qui vient d'être ajouté pour obtenir le polygone qui a un côté de plus que le polygone précédemment tracé et le nombre de segments tracés augmente d'autant : 36 + 9 = 45 (polygone à 10 côtés), 45 +10 = 55 (polygone à 11 côtés) et ainsi de suite jusqu'à 1891 + 62 = 1953 (polygone à 63 côtés), 1953 + 63 = 2016 (polygone à 64 côtés). Se rendre compte alors que les quatre segments qui manquent pour arriver à 2020 appartiennent au polygone à 65 côtés.
  (Cette procédure semble longue et fastidieuse. Un calcul d'une soixantaine de sommes et un contrôle rigoureux sont nécessaires mais cela ne prend que quelques minutes avec une calculatrice.)

Ou

- Organiser les données précédentes dans un tableau par exemple :

nb de côtés du polygone	3	4	5	6	…	n
nombre de nouveaux segments		3	4	5	…	n - 1
nombre total de segments : Sn	3	3+3	3+3+4	3+3+4+5	…	3+3+4+5+…+(n-1)

- Observer que si on remplace 3 par 1+2, la somme à calculer est : 1 + 2 + 3 + 4 + 5+…+ (n - 1)
- Si la formule qui donne la somme des n premiers nombres naturels est connue : $S_n = [n (n + 1)] / 2$, la procédure est plus rapide que la précédente. Quelques essais de valeurs de n permettent de découvrir que pour n = 64 (polygone à 64 côtés) la somme 1 + 2 + 3 + ... + 63 est 2016 (= 63 × 64/2). En déduire que le 2020e segment appartient au polygone à 65 côtés.

Attribution des points

4 Réponse correcte (65 côtés) avec description claire et complète de la procédure (formulation correcte des relations entre le nombre de côtés de la figure, la somme des nombres de segments et détail des calculs)

3 Réponse correcte avec description peu claire ou incomplète (par exemple, calculs pas complètement explicités)

Ou procédure correcte et bien décrite mais avec une erreur de calcul ou non prise en compte des 3 segments du triangle

Ou recherche pas à pas correcte pour les dix à quinze premiers éléments mais avec une erreur qui conduit à la réponse 64 ou 66

2 Réponse correcte sans aucune explication

Ou réponse erronée ou absence de réponse, mais avec une description correcte des relations entre le nombre de côtés de la figure et la somme des nombres de segments

1 Début de raisonnement correct avec calcul des sommes des nombres de côtés d'au moins les vingt à trente premiers polygones

0 Incompréhension du problème

F. ASSEMBLAGES DE TRIANGLES (Cat. 72, 82, 92)

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Rechercher, parmi les polygones obtenus en assemblant par des côtés de même longueur six triangles rectangles égaux (dont les côtés mesurent 3 ; 4 et 5 cm), l'un de ceux dont le périmètre est maximal.

Analyse de la tâche

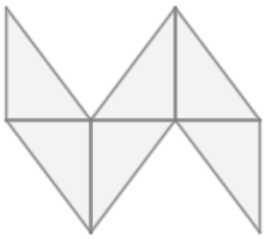
- Observer les exemples pour s'approprier les règles de construction des figures.
- Procéder par essais : après avoir construit une figure et calculé son périmètre, chercher à en construire un autre dont le périmètre est plus grand et continuer ainsi en cherchant des figure avec des périmètres de plus en plus grands.

Ou

- Se rendre compte que pour obtenir le périmètre maximal il faut avoir le maximum de côtés de triangles sur le pourtour et comprendre que le périmètre sera le plus grand si ceux-ci sont les côtés les plus longs des triangles.
- Quelle que soit la figure formée, il y a toujours cinq côtés communs et donc, puisqu'il n'y a que 18 côtés de triangles et 5 en commun, le pourtour sera formé de 18 – (2 x 5) = 8 côtés, dont seuls six peuvent être des hypoténuses et deux pouvant être des côtés les plus grands de l'ange droit. Le périmètre le plus grand sera donc 6 × 5 + 2 × 4 = 38 (en cm).
- Chercher ensuite à dessiner un polygone ayant ce périmètre.

Ou

- Raisonner tout de suite sur le périmètre. La somme des périmètres de tous les triangles est 12 × 6 = 72. Les côtés adjacents ne font pas partie du pourtour et leurs mesures n'interviennent pas dans le calcul du périmètre. En disposant les triangles deux à deux avec un seul côté commun, seuls le premier et le dernier peuvent avoir leur hypoténuse et le côté « 4 cm » sur le contour, par conséquent leurs côtés « 3 cm » sont communs au deuxième et au cinquième triangle, qui auront à leur tour un côté « 4 cm » commun avec les troisième et quatrième triangles qui eux auront leurs côtés « 3 cm » en commun. On en déduit que le périmètre maximum du polygone est 72 – (2 × 2 × 3 + 2 × 2 × 4 + 2 × 3) = 38.
- Chercher ensuite à dessiner une figure ayant ce périmètre.
- Voici un exemple :



Attribution des points

4 Dessin correct d'une figure de 38 cm de périmètre avec indication et calcul du périmètre

3 Dessin correct d'une figure de 38 cm de périmètre avec indication du périmètre mais sans le calcul
Dessin correct d'une figure de 36 cm de périmètre avec indication et calcul du périmètre

2 Dessin correct d'une figure de 38 cm de périmètre sans indication ni calcul du périmètre
Ou dessin correct d'une figure de 38 cm de périmètre mais avec erreur de calcul du périmètre
Ou dessin correct d'une figure de 36 cm avec indication du périmètre mais sans le calcul
Ou dessin correct d'une figure de 34 cm de périmètre avec indication et calcul du périmètre

1 Dessin correct d'une figure de 34 cm avec indication du périmètre mais sans le calcul
Ou début de recherche cohérente (dessin de plusieurs figures respectant les contraintes sans aboutir à une conclusion)

0 Incompréhension du problème (dessin de figures qui ne respectent pas les règles)

G. DES TRIANGLES DANS UN POLYGONE (Cat. 72, 82, 92)

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver 8 décompositions différentes en quatre triangles d'un heptagone concave dessiné sur quadrillage.

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour faire apparaitre des triangles, il faut relier des sommets de l'heptagone ou prolonger des côtés parmi [GA], [EF], [DE] ou [BA].
- Remarquer que G, A et D sont alignés et que B, E et F le sont aussi donc prolonger [GA] et prolonger [EF] produit des découpages analogues à respectivement tracer [AD] et tracer [BE].

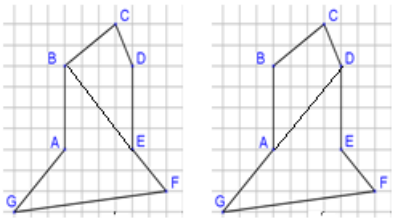
Recherche par essais et ajustements :

- Tracer des segments reliant des sommets ou en prolongeant des côtés de la figure et conserver ceux qui permettent d'obtenir quatre triangles intérieurs à la figure.
- Faire plusieurs essais et les comparer à ceux déjà trouvés.

Ou

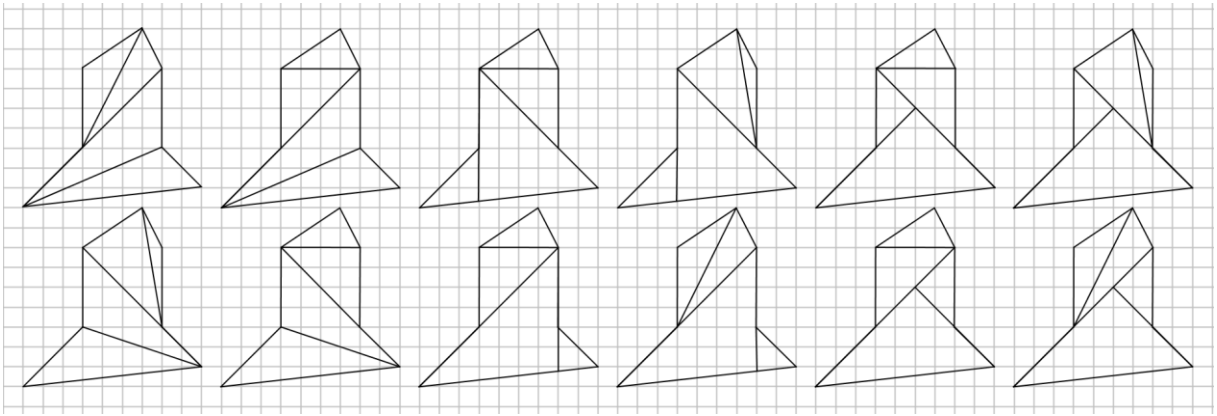
Recherche organisée :

- Avoir l'intuition qu'il est plus simple de partager un quadrilatère en triangles que de partager directement la figure qui est donnée.
- Rechercher toutes les façons de partager la figure en quadrilatères (il y en a deux).



- Pour chacun des deux cas :
  - partager chaque quadrilatère en deux triangles ;
  - chercher différentes façons de partager les deux quadrilatères pour obtenir 8 partages différents de la figure donnée.

Ci-dessous sont dessinées les 12 décompositions possibles de l'heptagone.



Attribution des points

4 8 découpages corrects différents

3 7 découpages corrects différents avec éventuellement une erreur ou un doublon
Ou 6 découpages corrects différents avec éventuellement des doublons, mais sans erreur

2 6 découpages corrects différents avec une ou deux erreurs et éventuellement un doublon
Ou 5 ou 4 découpages corrects différents avec au plus une erreur et éventuellement des doublons

1 5 ou 4 découpages corrects différents avec 2 erreurs ou plus et éventuellement des doublons
Ou de 1 à 3 découpages corrects différents-avec éventuellement des doublons ou des erreurs

0 Incompréhension du problème : aucun découpage en 4 triangles

H. L'ENCLOS DES ANIMAUX (Cat. 82, 92)

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver l'aire d'une figure agrandie à partir des dimensions indiquées sur la figure d'origine, le rapport d'agrandissement étant déterminé à partir de la donnée d'une des dimensions de l'agrandissement.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nouvel enclos est un agrandissement de l'enclos représenté sur le dessin : l'enclos et chaque zone auront la même forme mais pas les mêmes dimensions.
- Comprendre que les seules informations numériques dont on dispose sur l'agrandissement sont la nouvelle largeur du chemin d'accès (1,80 m) et sa largeur initiale qui peut être déterminée à partir des autres données.
- Savoir interpréter la phrase « en augmentant les dimensions de chaque zone dans les mêmes proportions » : le rapport entre les dimensions correspondantes est constant ou toutes les dimensions sont multipliées par un même nombre.
- Déterminer le coefficient d'agrandissement ou le rapport constant (1,8) à partir de la largeur initiale et de la nouvelle largeur du chemin d'accès. (Il est également possible de considérer que chaque dimension doit être augmentée de 80 %).
- Comprendre que toutes les dimensions initiales des quatre zones peuvent être déterminées à partir des informations portées sur le dessin.
- Considérer la zone réservée aux dindes comme étant la réunion d'un grand rectangle et de deux petits rectangles ou comme étant un rectangle amputé d'un petit rectangle. Déterminer les dimensions initiales de cette figure (2 m x 5,5 m + 0,5 m x 3 m + 0,5 m x 1,5 m ou 2,5 m x 5,5 m – 1 m x 0,5 m). Utiliser les proportions ou le coefficient d'agrandissement pour calculer les dimensions de la figure agrandie (3,6 m x 9,9 m + 0,9 m x 5,4 m + 0,9 m x 2,7 m ou 4,5 m x 9,9 m – 1,8 m x 0,9 m). Calculer l'aire de la figure agrandie : 42,93 m^2 (35,64 m^2 + 4,86 m^2 + 2,43 m^2 ou 44,55 m^2 – 1,62 m^2).

Ou

- Considérer l'aire de la zone réservée aux dindes comme étant la différence entre l'aire de l'enclos et de la somme des 3 autres zones qui sont un carré et deux rectangles. Déterminer la largeur initiale du chemin d'accès, les autres dimensions étant connues. Calculer les dimensions de l'enclos et de ces zones agrandies (9,9 m x 9,9 m ; 5,4 m x 5,4 m ; 1,8 m x 6,3 m ; 2,7 m x 5,4 m) puis leurs aires (98,01 m^2 ; 29,16 m^2 ; 11,34 m^2 ; 14,58 m^2). En déduire l'aire de la zone réservée aux dindes 42,93 m^2 [98,01 m^2 - (29,16 m^2 + 11,34 m^2 + 14,58 m^2)].

Ou

- Après avoir déterminé l'aire de la zone réservée aux dindes dans l'enclos initial : 13,25 m^2 [11 m^2 + 1,5 m^2 + 0,75 m^2 ou 13,75 m^2 – 0,5 m^2 ou 30,25 m^2 – (9 m^2 +3,5 m^2 + 4,5 m^2)], appliquer la propriété « dans un agrandissement, si les dimensions sont multipliées par k, les aires le sont par k^2 ». L'aire de la zone réservée aux dindes dans l'enclos agrandie est 42,93 m^2 (13,25 m^2 x 1,8^2).

Attribution des points

4 Réponse correcte (42,93 m^2) avec détermination des dimensions, calcul des aires et énonciation de la proportionnalité des dimensions ou de la propriété relative au rapport d'aires dans un agrandissement

3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires (telles que présence des calculs mais propriété utilisée d'un agrandissement non explicitée ou propriété explicitée, mais absence de certains calculs)

2 Réponse correcte sans explication ni justification

Ou calculs corrects de toutes les dimensions utiles au calcul de l'aire réservée aux dindes dans l'enclos agrandi (avec présence ou absence de calculs d'aires, exacts ou erronés)

Ou réponse erronée consécutive à une ou plusieurs erreurs de calcul mais raisonnement correct et bien explicité

1 Début de recherche correct (par exemple : utilisation de la proportionnalité pour déterminer au moins trois des dimensions sur l'agrandissement)

0 Incompréhension du problème

I. LOTERIES (Cat. 92)

Tâche mathématique

Étant donné dans **N** un système de deux équations du premier degré à trois inconnues, déterminer les valeurs numériques de deux autres combinaisons à coefficients entiers naturels de ces trois mêmes inconnues.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les billets des trois loteries ont des prix différents inconnus et qu'on ne connaît que la dépense totale pour l'acquisition de deux quantités différentes de billets des trois types et qu'il s'agit de trouver la dépense de chacun des deux amis pour l'achat des deux autres combinaisons des trois types de billets.
- Exprimer sous forme synthétique les informations relatives au premier achat de billets, par exemple :
  P_1 : B + 3J + 7V = 44 S_1 : B + 4J + 10V = 58 (montants connus)
  et au deuxième achat :
  P_2 : B + J + V = ? S_2 : 2B + 3J + 5V = ? (montants inconnus)
  Déduire de la relation S_1 que la valeur de V ne peut pas excéder 5 car si V = 6, 10V serait supérieur à 58.
- Procéder par essais en attribuant par exemple une valeur au billet vert (c'est celui qui est présent en plus grand nombre dans les deux quantités dont les prix sont connus). Les valeurs à envisager pour V sont donc 1, 2, 3, 4, 5.
  - Si V = 1, alors B + 4J = 48 et J peut prendre les valeurs 11, 10, 9 ……, 1 ; les valeurs correspondantes de B sont 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44.
  - Tester chaque triplet de valeurs (B, J, 1) dans P_1. L'égalité n'est vérifiée que pour B = 4 et J = 11.
  - A partir de là, calculer les prix payés par Pierre et Samuel pour leur second achat :
    P_2 : B + J + V = 4 + 11 + 1 = 16 (euros) S_2 : 2B + 3J + 5 V = 8 + 33 + 5 = 46 (euros)
  - Procéder de même pour les autres valeurs de V.

  On obtient 4 solutions (V = 1, J =11, B = 4) ; (V = 2, J = 8, B = 6) ; (V = 3, J = 5, B = 8) ; (V = 4, J = 2, B = 10) qui conduisent toutes à P_2 : B + J + V = 16 (euros) et S_2 : 2B + 3J + 5 V = 46 (euros).

Ou

- Chercher à combiner les deux relations connues S_1 et P_1 afin d'obtenir d'autres égalités. En les soustrayant membres à membres on obtient J + 3V = 14.
- Procéder ensuite par essais en attribuant successivement à V les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5, ce qui conduit aux solutions (V = 1, J =11) ; (V = 2, J = 8) ; (V = 3, J = 5); (V = 4, J = 2).
  - Reporter ces valeurs dans S_1 ou P_1 pour déterminer les valeurs correspondantes de B : 4, 6, 8 et 10
  - Déterminer ensuite les prix payés par Pierre et Samuel pour leurs seconds achats.

Ou

- Après avoir trouvé que J + 3V = 14, en introduisant cette relation dans le premier membre de S_1, arriver à :
  B + 4J + 10 V = B + J + (3G + 9V) + V = B + J + 3(G + V) + V = B + J + 3 × 14 + V = 58
  D'où on tire la valeur P_2 : B + J + V = 58 – (3 × 14) = 58 – 42 = 16.
- Procéder de façon analogue pour déterminer la valeur de S_2 :
- 2B + 3J + 5V = 2B + (J + 3V) + 2J + 2V = (2B + 2J + 2V) + (J + 3V) = 2 × 16 + 14 = 32 + 14 = 46.

Ou

- Se rendre compte, après quelques essais, que les expressions P_2 et S_2 peuvent être obtenues par des combinaisons linéaires opportunes de P_1 et S_1 et qu'il est donc possible de déterminer le coût total correspondant de chacune d'elles. On a en effet :
  P_2 : B + J + V = 3(B + 3J + 7V) – 2(B + 4J + 10V) = $3P_1 - 2S_1$ = 3 × 44 – 2 × 58 = 16
  S_2 : 2B + 3J + 5V = 5(B + 3J + 7V) – 3(B + 4J + 10V) = $5\,P_1 - 3S_1$ = 5 × 44 – 3 × 58 = 46

Attribution des points

4 Réponse correcte (Pierre dépense 16 euros et Samuel dépense 46 euros) avec explications claires et complètes de la procédure (résolution par combinaisons et essais ou substitutions, avec présence des calculs et vérification de l'invariance du montant des deux derniers achats, obtenue à partir des prix individuels de chaque billet)

3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes (par exemple des passages mal explicités dans les procédures par combinaisons et substitutions ou oubli d'une solution parmi les quatre dans une procédure par essais, mais constat de l'invariance des montants des seconds achats)

2 Réponse erronée due à une erreur de calcul mais avec explications claires et complètes de la procédure

Ou réponse correcte obtenue à partir du premier triplet de valeurs trouvées pour le prix de chaque type de billets sans considérer les trois autres possibilités

1 Début de raisonnement correct (par exemple, essai d'obtention des deux combinaisons dont les prix sont à déterminer à partir des deux dont les prix sont connus ou tentative inaboutie de résolution par essais)

0 Incompréhension du problème