A. PRALINES AU CHOCOLAT (Cat. 72)

Dans une confiserie, Zoé prend une boîte de chocolats. Elle s'adresse au vendeur.

Zoé : Bonjour Monsieur, dans cette boîte y a-t-il autant de pralines noires que de pralines blanches ?

Le vendeur : Non. Si vous voulez, je peux remplacer une praline noire par une praline blanche pour qu'il y ait autant de pralines de chaque sorte.

Zoé : Oh non ! Au contraire ! N'enlevez pas de pralines noires, ce sont mes préférées.

Le vendeur : Très bien, si vous voulez, je peux remplacer une praline blanche par une praline noire. Dans ce cas, le nombre de pralines noires serait le double du nombre de pralines blanches.

Combien de pralines de chaque couleur y a-t-il dans cette boîte ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres tels que, si on diminuait le premier de 1 et que l'on augmentait le second de 1 ils seraient égaux et si l'on diminuait le second de 1 et que l'on augmentait le premier de 1, ce dernier serait le double du second.

Analyse de la tâche

- Lire le texte et comprendre que ce sont les nombres de chocolats de chaque sorte qui sont à déterminer à partir des deux échanges proposés, en particulier : « Remplacer un noir pas un blanc » signifie « retirer un noir et mettre un blanc à sa place », ou encore « enlever un noir et ajouter un blanc » ou encore « diminuer de 1 le nombre de noirs et augmenter de 1 le nombre de blancs » Par la même occasion, comprendre qu'il y a plus de noirs que de blancs. (De même pour « remplacer un blanc par un noir »).
- Après le premier échange où les nombres de noirs et de blancs sont devenus égaux revenir à l'état initial (en retirant un noir et remettant un blanc) pour comprendre qu'il y avait deux noirs de plus que de blancs.
- De la seconde relation avant et après les échanges, percevoir que le nombre de noirs augmenté de 1 est le double du nombre de blancs diminué de 1.
- Pour la résolution quelques essais suffisent, en partant de l'écart de 2, pour voir que parmi les couple (n ; b) (3 ; 1), (4 ; 2), (5 ; 3) il faut aller jusqu'à (7 ; 5) pour trouver celui qui répond à la deuxième relation : parce que 8 (7 + 1) est le double de 4 (5 – 1).

Ou, en partant du double, il ne faut aussi que quelques essais pour trouver que parmi les couples (2 ;1) ; (4 ;2) ; (6 ;3) ; (8 ;4) ; (10 ; 5) ;... c'est (8 ; 4) qui convient parce que 7 (8 – 1) vaut 2 de plus que 5 (4 + 1).

Attribution des points

4 Réponse correcte (5 blancs et 7 noirs) avec une description du raisonnement suivi ou une vérification du genre « si on remplace un noir par un blanc on aura 6 et 6 et si on remplace un blanc par un noir on aura 8 qui est le double de 4 »

3 Réponse correcte (5 blancs et 7 noirs) avec une description incomplète ou une vérification partielle (par exemple « on a fait des essais » mais avec une liste partielle de ces essais ou sans les décrire)

2 Réponse erronée due à une erreur de calcul mais raisonnement clair et complet sur les deux contraintes

ou réponse « 12 chocolats en tout » avec une description claire ou complète du raisonnement

ou réponse correcte sans aucune explication

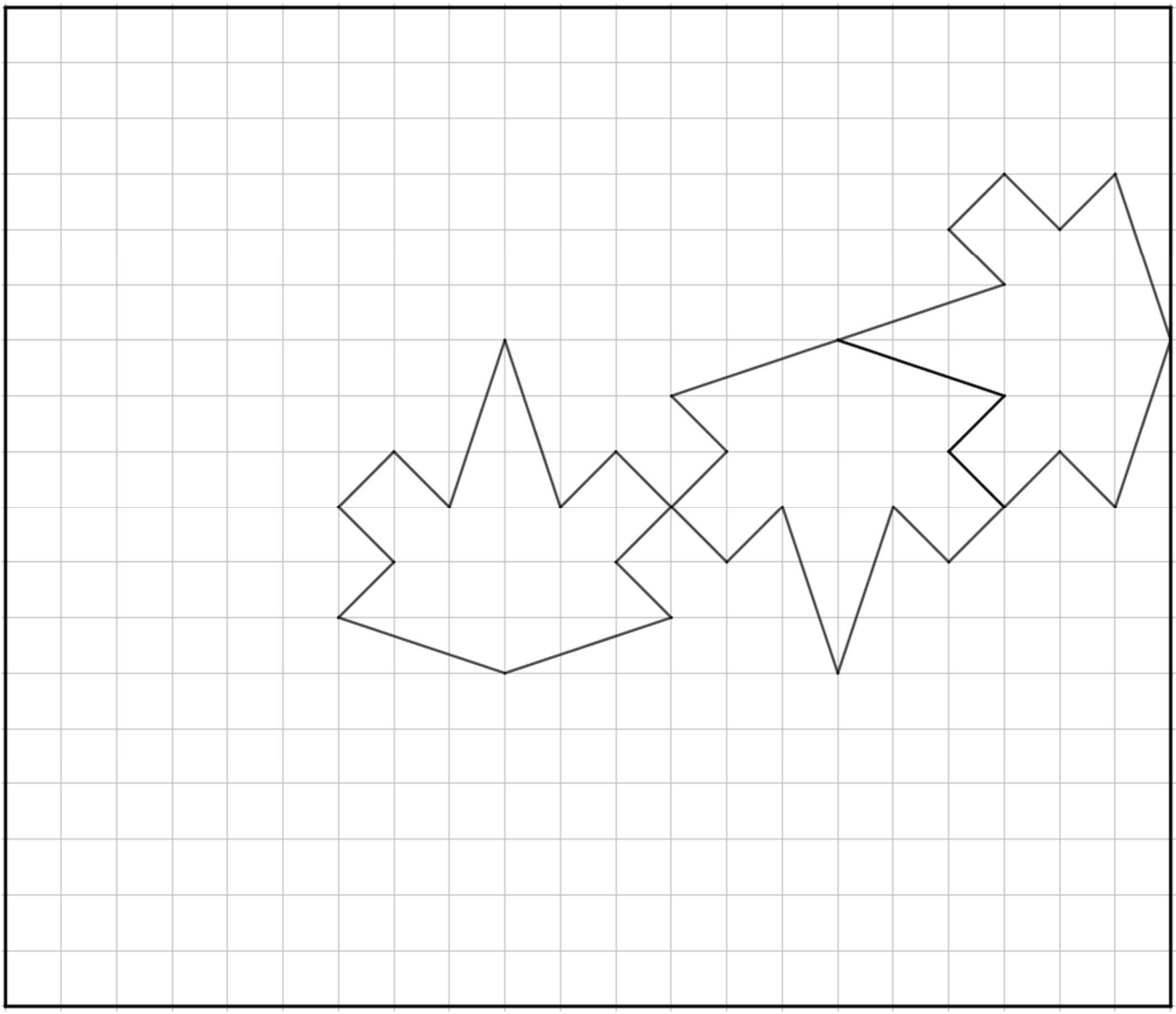
1 Début cohérent de recherche (par exemple : quelques essais cohérents sans aboutir à la réponse ou représentation cohérente du problème par dessins ou expressions mathématiques)

ou réponse « 12 chocolats en tout »

0 Incompréhension du problème

B. FEUILLES EN PAPIER (Cat. 72, 82)

Bruno a dessiné trois feuilles sur la carte quadrillée ci-dessous :



Bruno continue à dessiner sur la carte le plus grand nombre possible de feuilles. Elles sont toutes entières et identiques aux trois feuilles déjà dessinées.

Bruno veut ensuite colorier soit en vert, soit en rouge, toutes les feuilles entières qu'il a réussi à dessiner. Il veut respecter la règle suivante : deux feuilles qui se touchent par un côté ou plus n'ont pas la même couleur.

Dessinez, sur la carte de Bruno le plus grand nombre possible de feuilles entières.

Coloriez-les d'après les règles de Bruno.

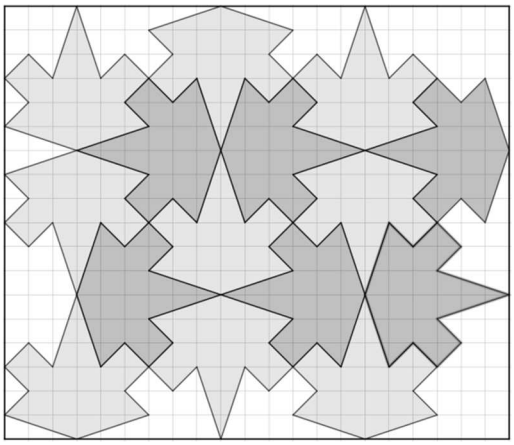
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Compléter le pavage d'un quadrillage avec des polygones entiers qui ont douze côtés et un axe de symétrie ; colorier toutes les figures entières avec deux couleurs, de façon à ce que deux figures ayant au moins un côté en commun soient de couleurs différentes.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de recouvrir le quadrillage avec le plus grand nombre possible de feuilles identiques à celles déjà dessinées.
- Comprendre, à partir des feuilles déjà dessinées que, pour remplir tous les espaces sans se superposer, les feuilles doivent être déplacées (par une translation et/ou une rotation ou une symétrie axiale).
- Pour placer les nouvelles feuilles on peut procéder simplement par découpage de modèles de feuille qu'on déplace comme des pièces de puzzles ou, par reproduction, de proche en proche, de feuilles déjà dessinées (par exemple la feuille de droite va s'insérer entre les deux autres après une translation de 7 diagonales de carreaux vers le bas et vers la gauche ; la feuille du milieu peut se retourner (demi-tour ou « effet miroir », avec sa pointe dirigée vers le haut et s'insérer entre le haut de la page, et la feuille de droite).
- Dessiner les feuilles (ou découper plusieurs modèles pour les coller) de façon qu'entre elles il n'y ait pas d'espace vide et qu'elles ne se superposent pas, pour arriver au nombre maximum de feuilles possible (15).
- Colorier les feuilles entières en rouge ou vert de façon à ce que les feuilles ayant un côté ou plus en commun ne soient pas de la même couleur.



Attribution des points

4 Réponse correcte et complète : les 15 feuilles sont dessinées et coloriées correctement (ou au moins avec les couleurs indiquées)

3 Réponse incomplète avec 14 feuilles dessinées et coloriées correctement

ou réponse avec 15 feuilles mais une erreur de coloriage (deux feuilles contigües ont la même couleur, ou les couleurs utilisées ne sont pas celles indiquées)

ou les 15 feuilles entières coloriées correctement et les feuilles non entières aussi coloriées en respectant la consigne sur les couleurs différentes de feuilles voisines

2 Réponse incomplète avec 9 à 13 feuilles dessinées et coloriées correctement

ou dessin de 14 ou 15 feuilles identiques au modèle donné, mais avec des erreurs dans le coloriage

1 Dessin de moins de 9 feuilles sans superposition ou erreurs dans le dessin de quelques-unes

0 Incompréhension du problème

C. RUBANS (Cat. 72, 82, 92)

Paola dispose de quatre pièces de tissu de couleurs différentes : rouge, jaune, verte et bleue. Elle les coud ensemble bout à bout pour obtenir un seul ruban de 66 cm de longueur.

Dans ce ruban :

- aucune pièce de couleur ne mesure moins de 10 cm ni plus de 20 cm ;
- la pièce verte est la plus courte de toutes, la pièce bleue est la plus longue ;
- chaque pièce mesure un nombre entier de centimètres ;
- la partie du ruban formée de la pièce rouge et de la pièce jaune est de même longueur que la partie formée des pièces verte et bleue ;
- la pièce rouge mesure 1 cm de moins que la pièce jaune.

Quelles peuvent être les longueurs de chaque pièce de tissu coloré ?

Écrivez toutes les solutions possibles.

Expliquez votre raisonnement.

ANALISI A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver quatre nombres naturels dont la somme est 66, dont aucun n'est plus grand que 20 ni plus petit que 10, dont la somme du premier et du troisième est égale à la somme du deuxième et du quatrième, dont la différence entre le premier et le troisième est 1.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : un ruban de 66 cm de longueur, formé de quatre pièces de couleur, dont on ne connaît pas les longueurs mais des relations permettant de les déterminer.
- Comprendre l'information de la quatrième condition : le ruban peut être divisé en deux parties égales : l'une formée de R + J, l'autre de V + B chacune de 33 cm (66 : 2).
- Tirer de la troisième condition la longueur des rubans rouge et jaune qui, en cas d'égalité serait 16,5 cm, mais comme R = J – 1 on a alors R = 16 cm et J = 17 cm.
- De la première et de la quatrième conditions, les longueurs possibles de B et V sont respectivement 18, 19 ou 20 cm, et 33 – 18 = 15 ou 33 – 19 = 14 ou 33 – 20 = 13.
- On trouve alors les solutions

  pour R et J, une seule possibilité : R = 16 et J 17 ;

  pour V et B trois possibilités ; V = 13 si B = 20 ou V = 14 si B = 19 ou V = 15 si B = 18.

Ou procéder per essais, choisissant une valeur de R, ajouter 1 et trouver J, additionner ces deux nombres pour trouver R + J = V + B et se rendre compte que la somme des deux parties (ou le double d'une des deux) doit être 66. Si ce n'est pas le cas, procéder à un autre essai ou comprendre que R + J est la moitié de 66.

Ou après avoir compris que R + J = V + B, ce qui signifie que R + J = 66 : 2 = 33 utiliser une représentation graphique ou une écriture symbolique pour exprimer la relation R + J = R + R + 1 = 33 et en tirer R = 16 et J = 17.

Une fois connus R et J, comprendre que B, la plus longue, peut valoir 20, 19 ou 18 et trouver les valeurs de V correspondantes.

Attribution des points

4 Réponse correcte (R = 16 ; J = 17 ; V = 13 ou 14 ou 15 ; B = 20 ou 19 ou 18) avec les trois possibilités pour le couple V et B avec description claire de la démarche accompagnée des calculs nécessaires

3 Réponse correcte avec description partielle ou peu claire

ou seulement les longueurs des pièces (avec toutes les possibilités pour V et B) sans spécifier les relations entre V et B (par exemple R = 16 ; J = 17 ; V = 13 ou 14 ou 15 ; B = 18 ou 19 ou 20), mais avec description claire de la démarche

2 Réponse correcte sans description ni calculs

ou longueurs correctes pour R et J, et seulement deux couples de valeurs pour V et B (par exemple absence de 20 pour avoir mal interprété la condition « …ni plus de 20 ») avec description claire et calculs

ou présence d'une seule erreur de calcul, mais avec description claire

1 Réponse incomplète : longueurs correctes pour R et J, une seule possibilité trouvée pour le couple V et B

ou réponse qui ne tient pas compte de toutes les conditions

0 Incompréhension du problème

D. MODÈLES RÉDUITS (Cat. 72, 82, 92)

Jean range ses 96 voitures dans trois boîtes (une petite, une moyenne et une grande).

- Il met trois fois plus de voitures dans la boîte moyenne que dans la petite boîte.
- Il met deux fois plus de voitures dans la grande boîte que dans la boîte moyenne.

Après avoir rempli les trois boîtes, il reste des voitures. Leur nombre est égal au tiers du nombre de voitures que Jean a mises dans la grande boîte.

Combien de voitures Jean a-t-il mis dans chaque boîte ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Partager 96 en quatre nombres proportionnels à 1, 2, 3 et 6.

Analyse de la tâche

- De la lecture de l'énoncé, comprendre qu'il y a quatre nombres de voitures à déterminer, celles contenues dans les trois boîtes et celles qui restent, dont la somme est 96 ; qu'aucun des nombres n'est connu et qu'il faudra recourir aux relations « double », « triple » et « tiers ».
- Remarquer que ces relations permettent d'exprimer chaque nombre en fonction de celui de la petite boîte et les traduire par, un « petit », un « moyen » qui est le triple du « petit » un « grand » qui est le double du « moyen » et un reste qui est le tiers du « grand ».
- En procédant par essais et ajustements progressifs on peut partir du nombre de la petite boîte, écrire les quadruplets possibles : 1, 3, 6, 2 (total 12), puis 2, 6, 12, 4 (total 24), ...et se rendre compte qu'il faut aller jusqu'à 8, 24, 48, 16 pour satisfaire la condition que la somme est 96.
- En procédant de manière plus synthétique (ou pré-algébrique) on peut laisser un des nombres indéterminé provisoirement (le petit par exemple) et calculer que la somme de 1 « petit », 3 « petits », 6 « petits », 2 « petits » représente 12 « petits » correspondant à 96. Il ne reste alors plus qu'à diviser 96 par 12 pour déterminer le nombre de voitures de la petite boîte 8, puis de déterminer les nombres des autres boîtes.
- Algébriquement : établir et résoudre l'équation où l'inconnue x est le nombre de voitures dans la petite boîte: $x + 3x + 6x + 2x = 96$. Dont la solution est 8.

Attribution des points

4 Réponse correcte (petite boîte : 8 voitures, boîte moyenne : 24 voitures, grande boîte : 48 voitures,) avec explications complètes et claires, par exemple essais organisés, ou la mention d'un total de 12 petites boîtes, ou un schéma faisant apparaître clairement l'unité commune

3 Réponse correcte et complète avec explications incomplètes ou peu claires (par exemple, la division 96 : 12 sans expliquer à quoi correspond 8, ou essais non organisés)

2 Réponse correcte sans explications

ou raisonnement correct avec une erreur de calcul dans la résolution

1 Début de recherche cohérente avec quelques tentatives ne menant pas à la solution

ou identification du nombre restant de modèles réduits.

0 Incompréhension du problème

E. TANGRAM (Cat. 72, 82, 92)

Un menuisier construit des tangrams en bois.*

Un jour, un client lui commande un tangram dont le côté du petit carré mesure 6 cm.

Combien mesure un côté de ce tangram ?

Expliquez votre raisonnement.

** Le tangram (voir photo) est un puzzle très connu, originaire de la Chine Antique. Il s'agit d'un grand carré constitué de sept pièces, dont un petit carré, permettant de réaliser de très nombreuses figures.*

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir de la photo d'un Tangram et de ses sept pièces, trouver la mesure du côté du Tangram connaissant la mesure du côté de la petite pièce carrée (6 cm).

Analyse de la tâche

- Observer la photo et « voir » qu'il s'agit d'un puzzle de 7 pièces, constater qu'il y a cinq pièces en forme de triangle, que l'une est un carré (selon l'énoncé) et la dernière un quadrilatère.
- Analyser les rapports entre les côtés des pièces (Y a-t-il des côtés égaux ? des côtés dont la longueur est le double de celle d'un autre ?) puisque la seule donnée numérique est le côté du petit carré (6) et la question porte sur le côté du Tangram. Voir aussi qu'on peut s'intéresser aux aires des pièces, (Y a-t-il des pièces avec des aires égales ? des pièces dont l'aire est le double de celle d'une autre ?)

Il y a plusieurs manières de procéder :

a) reproduire le dessin en vraie grandeur à partir d'un carré de 6 cm de côté, dont on prolonge deux côtés perpendiculaires (qui deviendront les diagonales du Tangram), etc. Cette procédure permet d'arriver à la réponse 17 cm, à 1 mm près.

b) observer la figure, déduire que la diagonale du petit carré représente la moitié du côté du Tangram à construire. Au niveau 7 le théorème de Pythagore peut être déjà connu, calculer ainsi la mesure et la doubler, en arrondissant.

c) découper les pièces et procéder par déplacements et superpositions (translations, rotations, ...)

d) recourir, dans le cadre géométrique, à de simples déductions à partir des propriétés élémentaires des figures.

- Par exemple, voici quelques-unes de ces déductions (la pièce carrée est représentée par un carré)
  - de la position de ce carré => les deux grands et les deux petits triangles, voisins, sont rectangles,
  - les deux grands triangles étant rectangles => leur côté commun est sur la deuxième diagonale du Tangram => qui aboutit au sommet inférieur gauche et sépare le triangle moyen en deux triangles rectangles,
  - la diagonale « verticale » du petit carré le décompose en deux triangles rectangles => en glissant de 6 cm le demi carré de gauche le long de la diagonale du Tangram, il se superpose exactement au petit triangle du Tangram du haut à droite => ce petit triangle est un demi carré, ses côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et son grand côté (que nous appelons ici provisoirement « d » peut être estimé en mesurant la diagonale d'un carré de 6 cm de côté) » 8,5 cm => les demi-diagonales du Tangram ou les côtés de l'angle droit des grands triangles mesurent 12 cm.

On aboutit ainsi aux quatre longueurs possibles des côtés de sept pièces : 6 ou 12 ou « d » ou 2 ´ « d » (cm) ; en particulier les côtés des grands triangles rectangles mesurent, 12, 12, et 2 ´ « d » (cm) dont le dernier donnerait la réponse au problème si on était en mesure de le calculer. Sinon, les élèves peuvent éventuellement dessiner un

triangle rectangle isocèle avec des côtés égaux de 12 cm et mesurer l'autre côté, celui indiqué provisoirement par « d ».

Ou : passer par les aires des pièces à partir des déductions précédentes : en cm^2 celle du carré est 36, celle d'un petit triangle 18, celles du triangle moyen et du parallélogramme (composé de deux petits triangles) 36, celle de chacun des grands triangles 72, et finalement celle du Tangram 288 (avec le petit triangle comme unité on trouve 16 et 16 ´ 18 = 288). On peut aussi considérer que le triangle moyen est la moitié d'un carré, le quart du Tangram en bas à droite, dont l'aire est 72 (cm^2).

Dans un cas comme dans l'autre, il faut rechercher le côté d'un carré dont on connaît l'aire. Pour 288 c'est le nombre qui multiplié par lui-même donne 288, désigné par $\sqrt{288}$ mais donné par une de ses approximations » 17 ou 16,97 … Pour le côté du carré d'aire $\sqrt{72}$ » 8,5 ou 8,48… qu'il faudra multiplier par 2 pour arriver à la réponse.

Attribution des points

4 Réponse correcte (la mesure du côté du Tangram est, en cm, √288, ou une valeur numérique de 16,9 à 17,1cm en cas de détermination par dessin - avec présentation du dessin - ou » 17 ou 16,97 … par la calculatrice ou encore 12√2 - pour ceux qui auraient retenu la formule c√2), avec le détail de toutes les mesures intermédiaires trouvées - d'aires ou de longueurs - et quelques mots pour décrire la démarche comme, par exemple : les petits triangles sont la moitié du petit carré ou le côté du Tangram mesure le double de la diagonale du petit carré interne, avec une justification

3 Réponse correcte avec le détail de certaines mesures et description peu claire

2 Réponse correcte sans aucune explication ni détails de la procédure

ou réponse erronée (par exemple avec des erreurs de calcul), avec le détail de certaines mesures intermédiaires et description claire

1 Réponse qui se limite à l'aire du Tangram (288 cm^2)

ou mesure proche de 17 (inférieure à 16,8 ou supérieure à 17,1) sans présentation du dessin sur lequel a été prise la mesure

ou début de recherche cohérent avec quelques mesures ou relations trouvées entre les aires ou les côtés des figures

0 Incompréhension du problème

F. ÉGALITÉ À COMPLÉTER (Cat. 72, 82, 92)

L'enseignant a proposé à ses élèves de compléter cette égalité

$$..... \cdot 90 \cdot ..... = 1620$$

Il a donné les précisions suivantes. L'un des deux nombres à trouver

- s'écrit avec deux chiffres ;
- est compris entre 0 et 10 ;
- a comme dernier chiffre 5.

L'autre nombre manquant s'écrit aussi avec deux chiffres.

Écrivez tous les nombres qui peuvent être écrits à la place des pointillés pour que l'égalité soit vérifiée.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver toutes les paires de nombres positifs, dont le produit multiplié par 90 est 1620, tels qu'un des nombres est inférieur à 10 et s'écrit avec deux chiffres dont le dernier est 5.

Analyse de la tâche

- Comprendre que la partie gauche de l'égalité est un produit de trois facteurs dont un seul est connu (90) ; c'est à dire qu'il y a deux multiplications à effectuer : une première par un premier nombre et 90, une seconde par ce résultat et un deuxième nombre, dont le produit doit être 1620.
- Savoir que la multiplication est commutative et que, en cas de produits de trois nombres, l'opération est associative.

  Par exemple, dans cette expression on peut commuter les deux premiers nombres et associer ensuite les deux autres (encore inconnus) pour transformer l'expression de l'énoncé en 90 × (__ × __) = 1620, ou 90 × ... = 1620 et que le produit encore indéterminé se calcule par l'opération 1620 : 90 = 18.
- Comprendre que l'un des facteurs qui s'écrit avec deux chiffres en se terminant par 5 est obligatoirement de la forme ... , 5 et doit être choisi entre 0,5 ou 1,5 ou 2,5 ou 3,5 ; ... ; 9,5. La recherche consiste donc à trouver les quotients de 18 par un des nombres précédents, qui s'écrivent avec deux chiffres seulement.
- On trouve ainsi, après division, les paires de nombres solutions : (0,5 ; 36) ; (1,5 ; 12) ; (2,5 ; 7,2) ; (7,5 ; 2,4) ; toutes les autres paires doivent être exclues car ne répondant pas aux conditions données.

Attribution des points

4 Réponse correcte (les quatre paires possibles : (0,5 ; 36) ; (1,5 ; 12) ; (2,5 ; 7,2) ; (7,5 ; 2,4) (avec éventuellement les quatre paires « symétriques » (36 ; 0,5), (12 ; 1,5) ...) avec une description correcte et complète de la procédure utilisée (tous les calculs ou tentatives effectués)

3 Réponse correcte avec description incomplète de la procédure utilisée (absence de quelques calculs ou liste incomplète des essais)

2 Réponse partiellement correcte avec identification de 2 à 3 paires de nombres correctes et une description correcte de la procédure utilisée

ou les quatre paires avec une description correcte et complète de la procédure utilisée mais avec l'ajout d'une paire qui ne prend pas en compte les conditions requises (par exemple la paire 4,5 et 4 ou ...)

ou les nombres à insérer dans les espaces sont trouvés (0,5 ; 1,5 ; 2,4 ; 2,5 ; 7,2 ; 7,5 ; 12 ; 36) mais pas regroupés en paires

ou procédure correcte, mais mauvaise réponse due à une erreur de calcul

ou réponse correcte sans explication

1 Début correct de raisonnement permettant d'identifier une paire de nombres corrects

0 Incompréhension du problème

G. LA MEILLEURE PÂTISSIÈRE (Cat. 72, 82, 92)

Anne, Betty et Carla participent à un concours de pâtisserie.

Elles doivent préparer des fondants au chocolat dans un temps limité.

Anne est rapide. Elle en prépare deux de plus que Carla et elle en prépare exactement le double de Betty.

En attendant la décision des juges, Anne se dit : En préparant 4 autres fondants, j'en aurais fait le double de Carla.

Combien de fondants Betty a-t-elle préparés ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer trois nombres naturels sachant que le premier est le double du deuxième, qu'il est supérieur de 2 au troisième et qu'en lui ajoutant 4 il est le double du troisième.

Analyse de la tâche

- Constater que la question porte sur le nombre de fondants B de Betty mais qu'il est nécessaire de trouver le nombre de fondants de chacune des filles : A (Anne), B et C (Carla) et que les trois nombres sont soumis à trois conditions qui se rapportent toutes à A
  - A vaut 2 de plus que C
  - A est le double de B
  - Si on augmente A de 4 il sera le double de C
- Procéder par essais en choisissant un nombre de fondants pour Anne : comprendre qu'il doit être un multiple de 2 et qu'il doit être supérieur à 2. Si Anne fait 4 fondants, Betty en fait 2 et Carla en fait 2 mais la troisième condition n'est pas respectée car 4 + 4 = 8 n'est pas le double du nombre de fondants de Carla. Poursuivre avec les nombres pairs suivants jusqu'à constater que si Anne fait 8 fondants la troisième condition est vérifiée car le nombre de fondants de Carla serait 6 et 8 + 4 = 12 = 6 x 2. Conclure que Betty a fait 4 fondants.

  Il est aussi possible d'effectuer des essais à partir du nombre de fondants de Carla et après avoir déterminé le nombre d'Anne de diviser ce nombre par deux pour trouver le nombre de fondants qu'a préparés Betty, ou encore à partir du nombre de Betty.

  (Dans tous les cas, les essais peuvent être organisés par lignes ou tableaux)

Ou, effectuer un raisonnement déductif (arithmétique ou algébrique) en traduisant les relations entre les trois nombres en écriture symbolique (ou au moyen d'une représentation graphique) :

$A = C + 2$ $A = 2B$ $A + 4 = 2C$

puis effectuer une substitution, par exemple en remplaçant A par C + 2 et déduire que C + 6 = 2C, à partir de quoi on trouve C = 6, puis A = 8 et B = 4.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Betty a préparé 4 fondants), avec description de la procédure suivie (explicitation des essais, procédure arithmétique ou algébrique bien expliquée)

3 Réponse correcte avec une description peu claire ou incomplète de la procédure

ou réponse correcte avec seulement la vérification de la solution

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse erronée à cause d'une erreur de calcul

1 Début de recherche correct

0 Incompréhension du problème

H. À TROIS, CA VA PLUS VITE (Cat. 82, 92)

Monsieur Seguin a une villa entourée de gazon. Il n'a pas besoin de tondeuse parce qu'il a une chèvre, Blanchette, un mouton, Frisé, et une vache, Hortense.

Pour brouter seul et entièrement le gazon :

- Blanchette a besoin de 6 heures,
- Frisé a besoin de 4 heures,
- Hortense a besoin de 3 heures.

Monsieur Seguin est pressé. Il met donc ses trois animaux ensemble sur son gazon.

Combien de temps les trois animaux mettront-ils pour brouter ensemble tout le gazon ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer la durée d'une tâche à effectuer par 3 animaux ensemble, connaissant le temps que chacun d'eux met pour effectuer seul la tâche (3 h, 4 h et 6 h).

Analyse de la tâche

- Comprendre que le temps va diminuer si les trois animaux broutent ensemble et que chacun broutera une partie du gazon au même rythme (vitesse) que lorsqu'il est seul. Pour pouvoir comparer ces rythmes, il faut penser à une unité commune de temps. Par exemple, penser que si B met 6 heures, en une heure elle broute un sixième du gazon, que F broute un quart du gazon par heure et H un tiers du gazon par heure. Puis faire appel à l'addition pour déterminer le rythme des trois animaux ensemble.
- Passer aux écritures puis aux opérations :

  En « gazon à tondre par heure », les trois vitesses sont 1/6, 1/4 et 1/3 et leur somme est 1/6 + 1/4 + 1/3 = 9/12 = 3/4 et pour trouver le temps nécessaire pour tondre « le gazon » à raison de 3/4 de « gazon à l'heure » il faut effectuer la division 1 : 3/4 = 4/3 en « heures ».

  Pour ceux qui ne maîtrisent pas l'addition des fractions ou qui ne perçoivent pas la division, une représentation graphique ou verbale peut aider à constater que si, en une heure on a fait trois parties de la tâche (3/4) et qu'il reste une partie (1/4) à effectuer, il suffira d'un tiers d'heure pour effectuer cette partie restante.
- Algébriquement, en choisissant le temps nécessaire (x, en heures) comme inconnue, l'équation correspondante est $x/6 + x/4 + x/3 = 1$, dont la solution est $x = 12/9 = 4/3$ ou 1 + 1/3 ou 1h 20 minutes

Attribution des points

4 Réponse correcte (1 heure et 20 minutes ou 80 minutes ou 4/3 d'heure) avec description claire de la démarche et les calculs correspondants

3 Réponse correcte avec description peu claire ou calculs incomplets

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse imprécise (proche de 80 minutes ou imprécision dans le passage entre fractions et heures et minutes) avec description de la démarche

1 Début de démarche correct avec estimations et perception de la somme des « vitesses » par heure

0 Incompréhension du problème

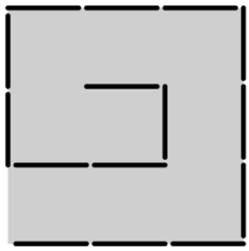
I. LA SPIRALE DE CURE-DENTS (Cat. 92)

Avec des cure-dents Guy construit, sur un même modèle, des spirales qui s'inscrivent dans des carrés de plus en plus grands.

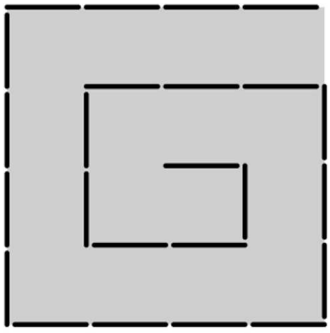
Ses quatre premières spirales sont représentées ci-dessous.

Longueur du côté du carré : 2 cure-dents

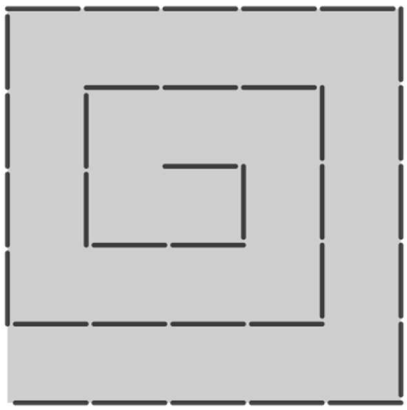
Longueur du côté du carré : 3 cure-dents



Longueur du côté du carré : 4 cure-dents



Longueur du côté du carré : 5 cure-dents



De combien de cure-dents Guy a-t-il besoin pour former une spirale qui s'inscrit dans un carré de 50 cure-dents de côté ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le 50e terme d'une suite de nombres 3 ; 8 ; 15 ; 24 ; 35 ; ... (à déterminer à partir du dénombrement de cure-dents organisées en spirales successives).

Analyse de la tâche

- Analyser les dessins de spirales pour identifier le modèle sur lequel elles sont constituées en partant du côté du carré (3 segments ayant pour longueur le côté du carré n, 2 segments de longueur (n - 1), 2 segments de longueur (n - 2) , ..., 2 segments de longueur 1) ou inversement en partant du centre.
- Faire la somme des cure-dents de chaque spirale et en construire éventuellement quelques autres pour trouver les premiers termes de la suite et les organiser progressivement (voir exemple des deux premières lignes du tableau suivant)

dimension de la spirale (n)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	50
cure-dents (N)	8	15	24	35	48	63	80	99	120	...	2600

écart d'un terme au suivant	7	9	11	13	15	17	19	21	23	...	
produit : $n \times (n + 2)$	2×4	3×5	4×6	5×7	6×8	7×9	8×10	9×11	10×12	...	50×52
repérage sur les « carrés »	9-1	16-1	25-1	36-1	49-1	64-1	81-1	100-1	121-1		2601-1

Passer en mode numérique et comprendre la logique qui permet de compléter le tableau sans dessiner les spirales :

- Soit observer qu'on peut passer d'un nombre au suivant en ajoutant les nombres impairs successifs à partir de 7 (3e ligne). Cette méthode exige une cinquantaine d'additions successives
- Soit en remarquant que le nombre de cure-dents (N) est le produit de deux nombres qui diffèrent de 2 : n et n + 2. Il s'agit de la fonction qui permet de passer directement de la dimension de la spirale au nombre de cure-dents N = n(n + 2)
- Soit en repérant que la suite des carrés de la dimension N de la spirale augmentée de 1 donne la suite des carrés des entiers (n + 1)2 : 9, 16, 25, 36, 49 et en constatant que les nombres de cure-dents valent 1 de moins que ces carrés. Il s'agit aussi d'une fonction qui permet de passer directement de la dimension de la spirale au nombre de cure-dents N = (n + 1)2 - 1
- ...

(Les formules $(n + 1)^2 - 1 = n(n + 2)$ peuvent aussi être obtenue à partir de l'analyse de la spirale de côté n mentionnée précédemment, de la connaissance de la formule qui donne la somme des n - 1 premiers nombres naturels et de connaissances algébriques sur le calcul littéral)

Attribution des points

4 Réponse correcte (2600 cure-dents) avec des explications claires présentant le raisonnement suivi pour montrer que la solution trouvée est générale ou trouvée à partir d'une conjecture basée sur l'étude d'au moins 5 spirales.

3 Réponse correcte (2600 cure-dents) avec des explications partielles ou pas suffisamment étayées.

2 Réponse erronée avec identification d'une règle qui permet de calculer les termes de la suite

ou réponse correcte sans explications

1 Début cohérent de recherche (par exemple dessin d'une cinquième spirale)

0 Incompréhension du problème