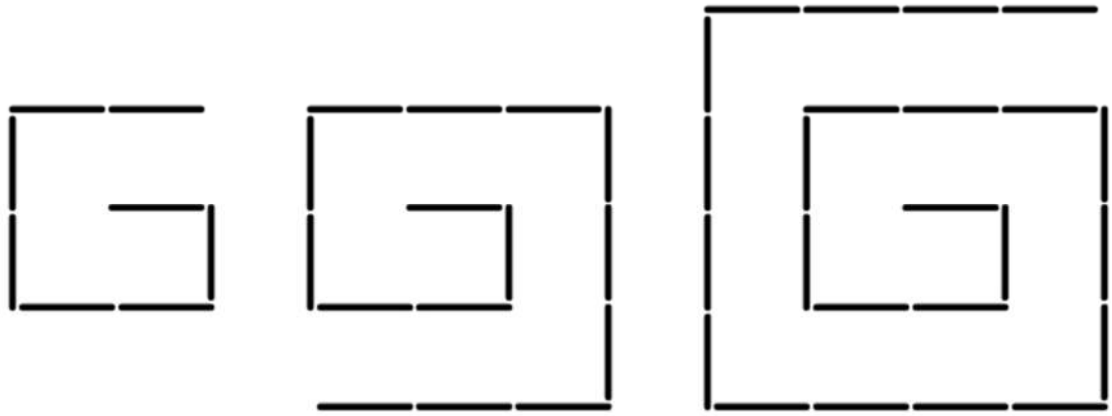
1. LA SPIRALE DES CURE-DENTS (I) (CAT. 31, 32)

Guy construit des spirales de plus en plus grandes avec des cure-dents.

Sur l'image, vous voyez ses trois premières spirales.

1e spirale 2e spirale 3e spirale



En continuant ainsi, Guy est arrivé à construire cinq spirales complètes.

Combien a-t-il utilisé de cure-dents pour construire ses cinq spirales ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la somme des cinq premiers termes d'une suite de nombres dont on connaît les trois premiers 8, 15, 24, … (déterminés à partir du dénombrement de cure-dents disposés en spirales)

Analyse de la tâche

- Observer les trois spirales données et leurs régularités : par exemple, elles sont inscrites dans des carrés de 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4, le « début » de chaque spirale est un cure-dent placé horizontalement, les côtés suivants sont de 2 cure-dents, etc.) et comprendre qu'il faudra construire la quatrième, la cinquième et la sixième spirale en conservant les mêmes règles de construction.
- Construire la quatrième spirale dont les côtés successifs doivent être de longueurs 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, puis 5 (un de plus que sur le dernier côté de la troisième), 5. Puis construire la cinquième selon les mêmes régularités par rapport à la précédente.
- Compter les cure-dents des trois premières (8, 15, 24) puis des suivantes (35, 48).
- Calculer la somme des cure-dents : 8 + 15 + 24 + 35 + 48 = 130.

Ou Se rendre compte, pour vérifier les comptages, de la régularité de la suite des nombres de cure-dents (8 ; 15 ; 24 ; 35 ; 48) où les différences entre un terme et le suivant sont les nombres impairs successifs à partir de 7 (7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15).

Attribution des points

4 Réponse correcte (130 cure-dents) avec les spirales correctement dessinées et /ou le détail des comptages et calculs

3 Réponse correcte avec dessins peu précis ou calculs et comptages incomplets

ou une erreur dans le dessin d'une seule spirale entraînant une erreur dans les cure-dents avec réponse cohérente pour la somme des cure-dents, avec le détail des calculs

ou détail des comptages complets mais la réponse (130) manque

2 Deux erreurs dans le dessin des spirales entraînant deux erreurs dans le dénombrement des cure-dents avec réponse cohérente pour la somme des cure-dents, avec le détail des calculs

ou dessin correct des deux spirales qui manquent, sans donner la réponse

ou réponse correcte (130) sans explications

ou réponse « 83 cure-dents » parce que ceux des trois spirales déjà dessinées ne sont pas pris en considération, avec détail des comptages et calculs ou dessin correct des spirales.

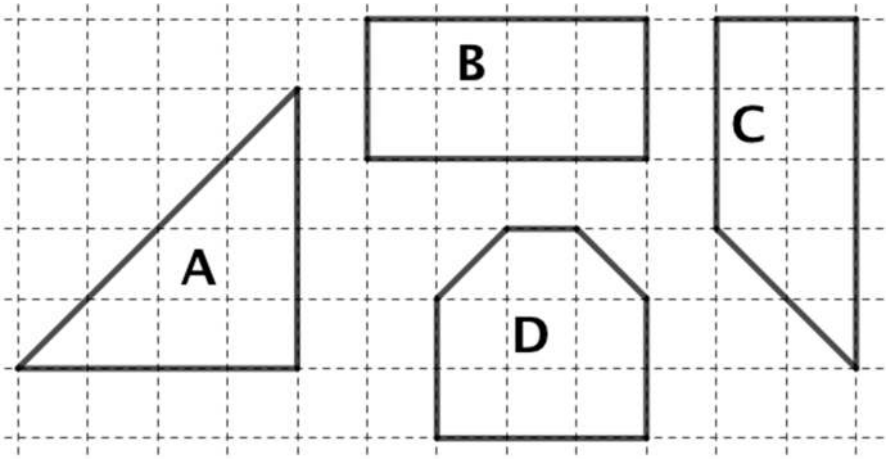
1 Début de recherche cohérent (par exemple la quatrième spirale correcte)

ou réponse erronée en raison de plus de deux erreurs de comptage ou de calcul

0 Incompréhension du problème

2. LES PLATES-BANDES DE L'ÉCOLE (Cat. 31, 32)

Dans la cour de l'école il y a quatre plates-bandes de fleurs :



Le jardinier veut entourer chaque plate-bande d'une barrière pour que les enfants ne marchent pas sur les fleurs.

Quelle plate-bande aura la barrière la plus longue ?

Quelle plate-bande aura la barrière la plus courte ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les périmètres de quatre polygones de même aire, dessinés sur une grille, dont les côtés suivent les lignes du quadrillage ou sont des diagonales de ses carrés.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les barrières sont construites sur les « bords » des figures et correspondent aux périmètres des quatre polygones.
- Se rendre compte que les côtés des carrés et les diagonales des carrés ont des longueurs différentes.
- Constater que la longueur des diagonales du quadrillage est supérieure à celle des côtés du quadrillage
- Compter les segments qui forment le périmètre de chaque figure

  A : 4 diagonales + 8 côtés B : 12 côtés C : 2 diagonales + 10 côtés D : 2 diagonales + 8 côtés
- Comparer deux à deux les périmètres en les décomposant en nombres de côtés et nombres de diagonales puis en déterminant les « différences » et en retirant ce qui est commun aux deux périmètres :

  A > B car après le retrait de 8 côtés, il reste à comparer 4 diagonales et 4 côtés

  A > C car après le retrait de 8 côtés et 2 diagonales, il reste à comparer 2 diagonales et 2 côtés

  A > D car après le retrait de 8 côtés et 2 diagonales il reste 2 diagonales de plus pour A

  D < B car après le retrait de 8 côtés, il reste à comparer 2 diagonales avec 4 côtés

  (Cette comparaison est moins évidente que les précédentes. Pour décider on peut penser à visualiser deux segments : l'un de 4 quatre côtés et l'autre de 2 diagonales (comme ceux de la figure C par exemple)

  D < C car après le retrait de 8 côtés et 2 diagonales, il reste 2 côtés de plus pour C

Ces comparaisons permettent d'affirmer que la barrière la plus longue est celle de A et la plus courte est celle de D

Ou, mesurer à la règle les segments qui constituent les périmètres des polygones et les additionner pour arriver aux mêmes conclusions. (Cette méthode exige des mesures à 1 ou 2 mm près et des additions de nombres décimaux, en cm, ou entiers, en mm)

Ou, pour chaque figure, suivre le pourtour avec une ficelle ou une bande ou autre matériel (en mettant éventuellement des marques d'un côté à l'autre). Puis comparer les longueurs des ficelles et noter que la plus longue est celle de A et la plus courte celle de D.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (la barrière de A est la plus longue et celle de D la plus courte) avec description claire des comparaisons deux à deux (voir analyse de la tâche) ou des mesures reportées sur le matériel utilisé

3 Réponse correcte et complète avec description peu claire ou incomplète de la procédure suivie ou quelques imprécisions ou erreurs de calcul dans les mesures

2 Réponse correcte mais illustrée seulement par une ou deux comparaisons

ou réponse correcte sans explication

ou une seule réponse correcte avec toutes les comparaisons nécessaires

ou réponse erronée due à des erreurs de calcul des mesures mais avec une procédure correcte

1 Début de recherche correct

ou une seule réponse correcte sans explication

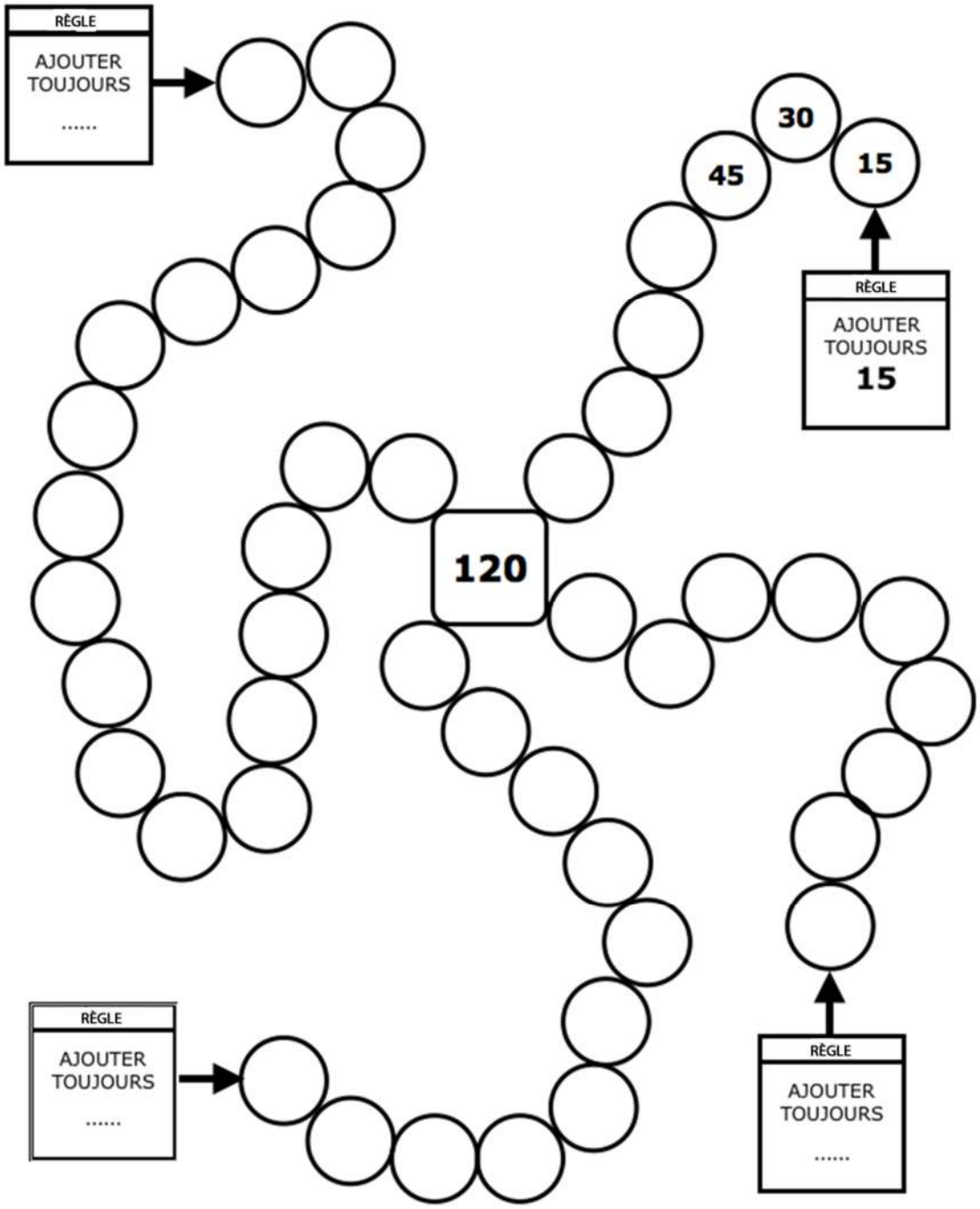
0 Confusions systématiques entre longueurs des côtés et diagonales (soit considérées comme égales, soir considérées dans un rapport 1/2)

ou incompréhension du problème

3. PARCOURS DE NOMBRES (Cat. 31, 32, 41)

Frédéric a commencé à compléter les parcours de nombres dessinés ci-dessous.

- Chaque parcours arrive au nombre central 120.
- Le nombre du premier cercle est égal au nombre inscrit sur l'étiquette RÈGLE.
- Il faut poursuivre le parcours en respectant la règle jusqu'à arriver à 120.



Complétez tous les parcours.

Écrivez les nombres qui conviennent à l'intérieur des cercles et sur les étiquettes « RÈGLE ».

ANALYSE A PRIORI

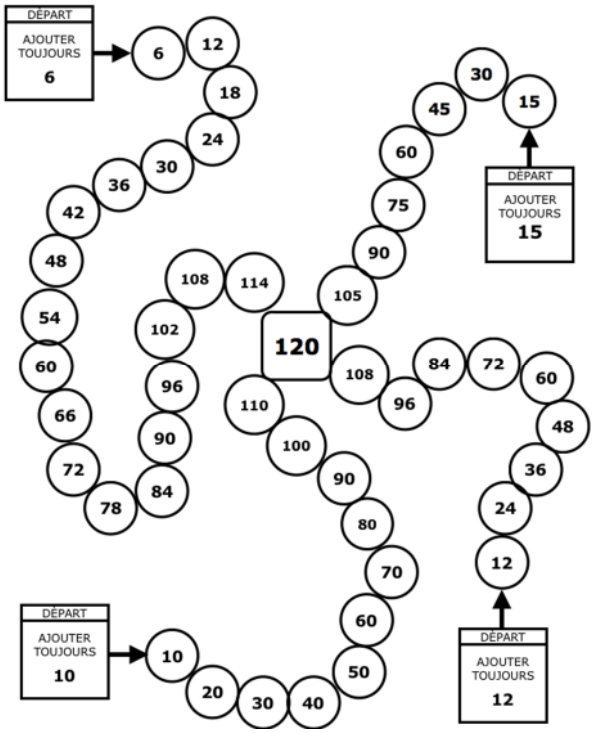
Tâche mathématique

Compléter quatre suites des premiers multiples d'un nombre. Pour trois d'entre elles, on ne connait que le nombre de termes, et le dernier terme, 120.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation : les quatre parcours représentés sur l'image doivent être complétés avec une suite ordonnée de multiples successifs du nombre indiqué sur l'étiquette de départ de chaque parcours pour arriver au nombre 120 ; le parcours des multiples de 15 est déjà commencé, et doit être complété ; pour compléter les autres parcours, il faut trouver d'abord la règle qui détermine chaque suite.
- Compléter le parcours des multiples de 15 en trouvant les nombres manquants.
- Pour trouver la règle qui détermine chacun des parcours qui ne sont pas encore définis,
  - on peut procéder par essais, en écrivant les multiples d'un premier nombre que l'on choisit, puis voir si à la fin on arrive exactement au nombre 120. Pour aller plus vite on peut voir que plus le nombre de cercles augmente, plus le nombre cherché diminue.
  - on peut compter les « emplacements », sans oublier celui du 120, pour trouver combien de multiples il faut insérer dans un parcours ; diviser ensuite le nombre 120 par le nombre de multiples pour trouver le nombre qui détermine la règle.

    120 ÷ 20 = **6** ; 120 ÷ 12 = **10 ;** 120 ÷ 10 = **12**
- Écrire les nombres aussi bien sur les étiquettes de départ qu'à l'intérieur des cercles pour compléter chaque parcours.



Attribution des points.

4 Réponse correcte, les nombres des quatre parcours, corrects et complets

3 Réponse avec trois parcours corrects et complets

ou réponse avec quatre parcours mais une à deux erreurs ou cases non complétées, dans un seul des parcours

2 Réponse avec deux parcours corrects et complets

ou réponse avec quatre parcours, mais de trois à cinq erreurs ou lacunes, dans un ou deux des parcours

1 Réponse avec un seul parcours correct et complet
ou réponse avec quatre parcours, mais avec plus de cinq erreurs ou lacunes

0 Incompréhension du problème

4. NOMBRES CACHÉS (Cat. 31, 32, 41)

Deux papillons cachent deux nombres d'un calcul.

Les deux nombres cachés par les papillons sont des nombres entiers. Ils peuvent être égaux ou différents.

Quels peuvent être les deux nombres cachés pour que le calcul soit correct ?

Indiquez toutes les possibilités.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Compléter un produit de trois facteurs égal à 80 dont un des facteurs est 5 et donner toutes les solutions composées de nombres naturels.

Analyse de la tâche

- Examiner l'écriture donnée, comprendre qu'elle se compose de quatre nombres dont deux sont cachés par les papillons, et qu'il s'agit d'une égalité : de 80 (à droite) et de deux multiplications successives (à gauche) dont il manque le premier facteur, dont on connaît le deuxième, 5, et dont il manque le troisième facteur.
- Comprendre qu'il s'agira de choisir un premier nombre, le multiplier par 5, calculer le produit, et multiplier ce produit par un deuxième nombre, à trouver, pour obtenir 80.
- Il y a deux façons de procéder

  1 par essais

  - en écrivant 1 dans la première case, on obtient 5 comme premier produit ($1 \times 5 = 5$) qui doit être multiplié par le deuxième nombre caché pour obtenir 80. Ce deuxième nombre est 16 ($5 \times \ldots = 80$ ou $80 : 5 = 16$),
  - Continuer de la même manière : avec 2 comme premier facteur, jusqu'à obtenir 8 comme deuxième nombre caché ; puis avec 3 et constater qu'il n'est pas possible d'obtenir un troisième facteur entier ; puis avec 4 pour obtenir les deux nombres cachés (4 ; 4), puis (8 ; 2). La recherche se termine après l'essai de 16 comme premier facteur.

  2 Comprendre qu'en effectuant la division de 80 par 5, on trouve le produit des deux nombres recherchés : $16 = 80 : 5$. Rechercher alors les diviseurs de 16 et former correctement les paires de facteurs dont il est le produit : (1 ; 16) ; (2 ; 8), et (4 ; 4).

Attribution des points

4 Réponse correcte, les trois possibilités (1 ; 16), (2 ; 8), (4 ; 4) avec éventuellement aussi (8 ; 2) et (16 ; 1), avec une description complète de la procédure utilisée (tous les calculs ou tentatives effectués)

3 Réponse correcte avec description incomplète de la procédure utilisée (absence de calcul ou liste incomplète des tentatives)

ou deux paires correctes avec descriptions claires

2 Réponse correcte sans explications

ou réponse avec deux paires correctes avec une description peu claire

ou seulement une paire avec description claire

ou liste correcte des nombres possibles (1 , 2 , 4, 8 , 16), mais sans les paires correspondantes

1 Début de raisonnement correct, mais avec des paires incorrectes de nombres en raison d'une erreur de calcul ou une ou deux paire identifiées sans explications

0 Incompréhension du problème

5. DANS LA MINE DE SEL (Cat. 31, 32, 41)

Les élèves et les deux enseignants d'une classe visitent une mine de sel.

À l'entrée, ils sont répartis en deux groupes. Chacun des deux groupes comporte le même nombre d'élèves et un enseignant.

Le premier groupe commence par visiter le Musée de la mine.

Le deuxième groupe commence par la visite de la mine de sel sur un petit train. Dans chaque wagon il y a au maximum quatre personnes. Ce groupe a besoin de quatre wagons dont uniquement trois sont occupés entièrement.

Quel peut-être le nombre d'élèves dans cette classe ? Indiquez toutes les possibilités.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les nombres dont la moitié est 3×4 ou $3 \times 4 + 1$ ou $3 \times 4 + 2$

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : la classe se divise en deux et dans chaque groupe il y a l'un des deux enseignants ; puis il y a 3 wagons de 4 personnes et un wagon incomplet pouvant accueillir 1 ou 2 ou 3 personnes dont l'une peut être un l'enseignant.
- Le groupe du train peut être formé des 12 personnes (3×4) des wagons complets avec 1, 2 ou 3 personnes en plus soit 13 ; 14 ou 15 personnes dont il faut soustraire l'enseignant ; c'est-à-dire 12, 13 ou 14 élèves.
- Multiplier ces trois nombres par 2 pour déterminer l'effectif de la classe : 24 ; 26 ou 28 élèves.

Ou partir des trois possibilités de personnes (13 ; 14 ou 15) multiplier par 2 et soustraire les deux enseignants.

Attribution des points

4 Les trois solutions (24, 26 et 28) avec une description complète de la démarche (reconnaissance des trois nombres 13, 14, 15 puis de 12, 13, 14 et multiplication par 2 ...)

3 Les trois solutions (24, 26 et 28) avec une description incomplète de la démarche

2 Les trois solutions (24, 26 et 28) sans description de la démarche

ou deux solutions avec une description de la démarche

ou réponses 26, 28 et 30 avec une description de la démarche mais oubli de la soustraction des deux enseignants ou réponse 12, 13, 14 avec une description de la démarche mais oubli de multiplication par 2

1 Début de recherche, avec essais mais sans arriver à la solution

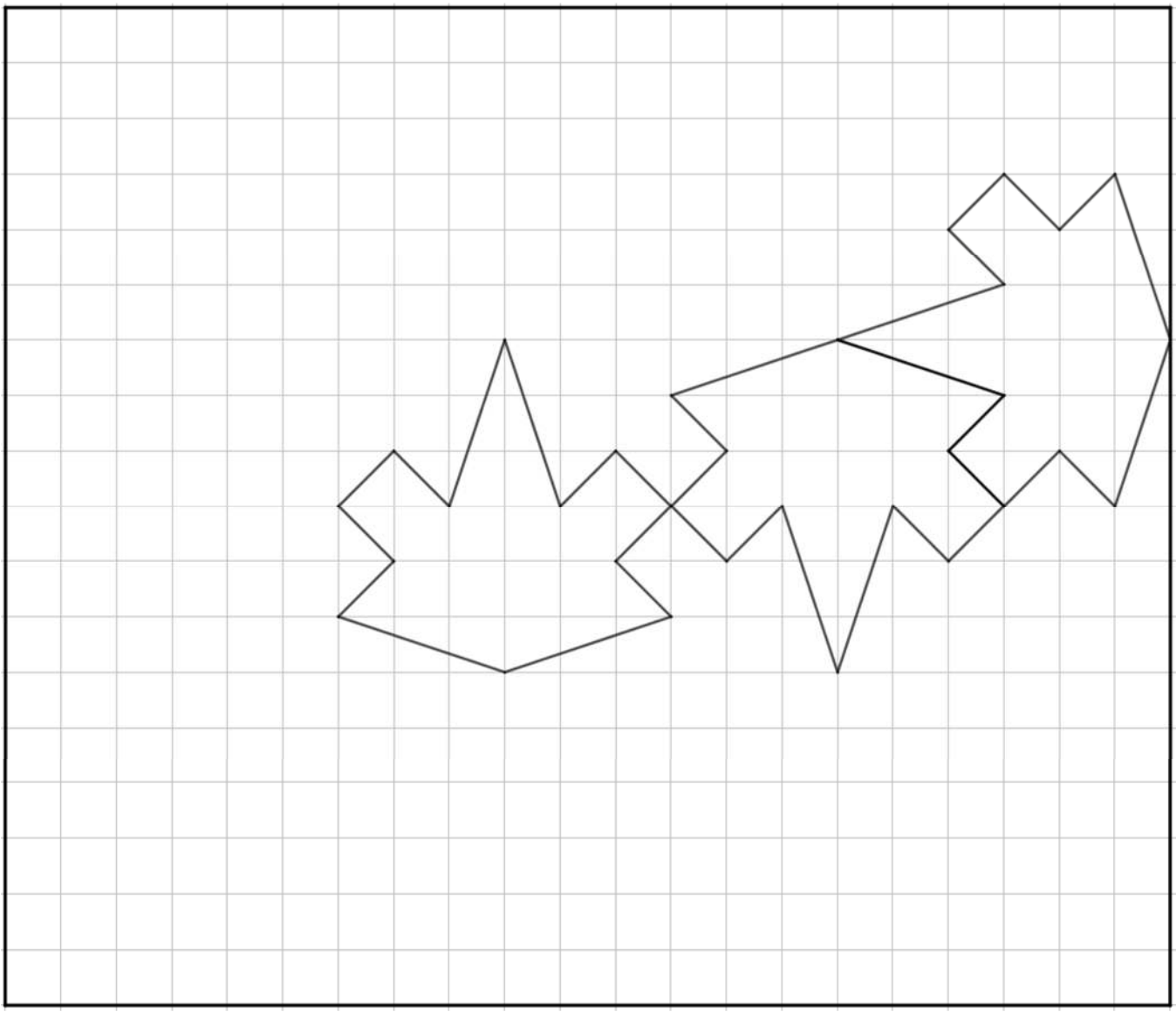
ou une ou deux solutions sans description de la démarche ou

réponse 13, 14, 15

0 Incompréhension du problème

6. FEUILLES EN PAPIER (Cat. 32, 41, 42)

Bruno a dessiné trois feuilles sur la carte quadrillée ci-dessous :



Bruno continue à dessiner sur la carte le plus grand nombre possible de feuilles. Elles sont toutes entières et identiques aux trois feuilles déjà dessinées.

Bruno veut ensuite colorier soit en vert, soit en rouge, toutes les feuilles entières qu'il a réussi à dessiner. Il veut respecter la règle suivante : deux feuilles qui se touchent par un côté ou plus n'ont pas la même couleur.

Dessinez, sur la carte de Bruno le plus grand nombre possible de feuilles entières.

Coloriez-les d'après les règles de Bruno.

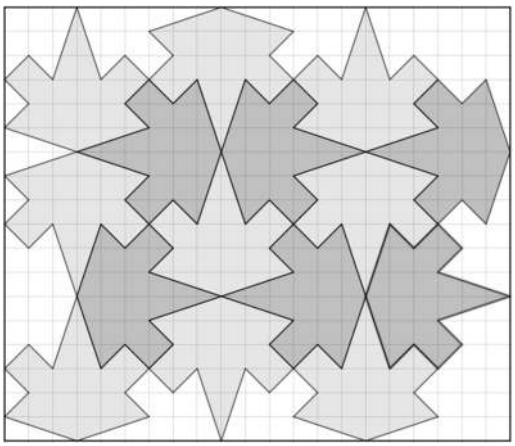
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Compléter le pavage d'un quadrillage avec des polygones entiers qui ont douze côtés et un axe de symétrie ; colorier toutes les figures entières avec deux couleurs, de façon à ce que deux figures ayant au moins un côté en commun soient de couleurs différentes.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de recouvrir le quadrillage avec le plus grand nombre possible de feuilles identiques à celles déjà dessinées.
- Comprendre, à partir des feuilles déjà dessinées que, pour remplir tous les espaces sans se superposer, les feuilles doivent être déplacées (par une translation et/ou une rotation ou une symétrie axiale).
- Pour placer les nouvelles feuilles on peut procéder simplement par découpage de modèles de feuille qu'on déplace comme des pièces de puzzles ou, par reproduction, de proche en proche, de feuilles déjà dessinées (par exemple la feuille de droite va s'insérer entre les deux autres après une translation de 7 diagonales de carreaux vers le bas et vers la gauche ; la feuille du milieu peut se retourner (demi-tour ou « effet miroir », avec sa pointe dirigée vers le haut et s'insérer entre le haut de la page, et la feuille de droite).
- Dessiner les feuilles (ou découper plusieurs modèles pour les coller) de façon qu'entre elles il n'y ait pas d'espace vide et qu'elles ne se superposent pas, pour arriver au nombre maximum de feuilles possible (15).
- Colorier les feuilles entières en rouge ou vert de façon à ce que les feuilles ayant un côté ou plus en commun ne soient pas de la même couleur.



Attribution des points

4 Réponse correcte et complète : les 15 feuilles sont dessinées et coloriées correctement (ou au moins avec les couleurs indiquées)

3 Réponse incomplète avec 14 feuilles dessinées et coloriées correctement

ou réponse avec 15 feuilles mais une erreur de coloriage (deux feuilles contigües ont la même couleur, ou les couleurs utilisées ne sont pas celles indiquées)

ou les 15 feuilles entières coloriées correctement et les feuilles non entières aussi coloriées en respectant la consigne sur les couleurs différentes de feuilles voisines

2 Réponse incomplète avec 9 à 13 feuilles dessinées et coloriées correctement

ou dessin de 14 ou 15 feuilles identiques au modèle donné, mais avec des erreurs dans le coloriage

1 Dessin de moins de 9 feuilles sans superposition ou erreurs dans le dessin de quelques-unes

0 Incompréhension du problème

7. PRALINES AU CHOCOLAT (Cat. 41, 42)

Dans une confiserie, Zoé prend une boîte de chocolats. Elle s'adresse au vendeur.

Zoé : Bonjour Monsieur, dans cette boîte y a-t-il autant de pralines noires que de pralines blanches ?

Le vendeur : Non. Si vous voulez, je peux remplacer une praline noire par une praline blanche pour qu'il y ait autant de pralines de chaque sorte.

Zoé : Oh non ! Au contraire ! N'enlevez pas de pralines noires, ce sont mes préférées.

Le vendeur : Très bien, si vous voulez, je peux remplacer une praline blanche par une praline noire. Dans ce cas, le nombre de pralines noires serait le double du nombre de pralines blanches.

Combien de pralines de chaque couleur y a-t-il dans cette boîte ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres tels que, si on diminuait le premier de 1 et que l'on augmentait le second de 1 ils seraient égaux et si l'on diminuait le second de 1 et que l'on augmentait le premier de 1, ce dernier serait le double du second.

Analyse de la tâche

- Lire le texte et comprendre que ce sont les nombres de chocolats de chaque sorte qui sont à déterminer à partir des deux échanges proposés, en particulier : « Remplacer un noir pas un blanc » signifie « retirer un noir et mettre un blanc à sa place », ou encore « enlever un noir et ajouter un blanc » ou encore « diminuer de 1 le nombre de noirs et augmenter de 1 le nombre de blancs » Par la même occasion, comprendre qu'il y a plus de noirs que de blancs. (De même pour « remplacer un blanc par un noir »).
- Après le premier échange où les nombres de noirs et de blancs sont devenus égaux revenir à l'état initial (en retirant un noir et remettant un blanc) pour comprendre qu'il y avait deux noirs de plus que de blancs.
- De la seconde relation avant et après les échanges, percevoir que le nombre de noirs augmenté de 1 est le double du nombre de blancs diminué de 1.
- Pour la résolution quelques essais suffisent, en partant de l'écart de 2, pour voir que parmi les couple (n ; b) (3 ; 1), (4 ; 2), (5 ; 3) il faut aller jusqu'à (7 ; 5) pour trouver celui qui répond à la deuxième relation : parce que 8 (7 + 1) est le double de 4 (5 – 1).

Ou, en partant du double, il ne faut aussi que quelques essais pour trouver que parmi les couples (2 ;1) ; (4 ;2) ; (6 ;3) ; (8 ;4) ; (10 ; 5) ;... c'est (8 ; 4) qui convient parce que 7 (8 – 1) vaut 2 de plus que 5 (4 + 1).

Attribution des points

4 Réponse correcte (5 blancs et 7 noirs) avec une description du raisonnement suivi ou une vérification du genre « si on remplace un noir par un blanc on aura 6 et 6 et si on remplace un blanc par un noir on aura 8 qui est le double de 4 »

3 Réponse correcte (5 blancs et 7 noirs) avec une description incomplète ou une vérification partielle (par exemple « on a fait des essais » mais avec une liste partielle de ces essais ou sans les décrire)

2 Réponse erronée due à une erreur de calcul mais raisonnement clair et complet sur les deux contraintes

ou réponse « 12 chocolats en tout » avec une description claire ou complète du raisonnement

ou réponse correcte sans aucune explication

1 Début cohérent de recherche (par exemple : quelques essais cohérents sans aboutir à la réponse ou représentation cohérente du problème par dessins ou expressions mathématiques)

ou réponse « 12 chocolats en tout »

0 Incompréhension du problème

8. RUBANS (Cat. 41, 42)

Paola dispose de quatre pièces de tissu de couleurs différentes : rouge, jaune, verte et bleue. Elle les coud ensemble bout à bout pour obtenir un seul ruban de 66 cm de longueur.

Dans ce ruban :

- aucune pièce de couleur ne mesure moins de 10 cm ni plus de 20 cm ;
- la pièce verte est la plus courte de toutes, la pièce bleue est la plus longue ;
- chaque pièce mesure un nombre entier de centimètres ;
- la partie du ruban formée de la pièce rouge et de la pièce jaune est de même longueur que la partie formée des pièces verte et bleue ;
- la pièce rouge mesure 1 cm de moins que la pièce jaune.

Quelles peuvent être les longueurs de chaque pièce de tissu coloré ?

Écrivez toutes les solutions possibles.

Expliquez votre raisonnement.

ANALISI A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver quatre nombres naturels dont la somme est 66, dont aucun n'est plus grand que 20 ni plus petit que 10, dont la somme du premier et du troisième est égale à la somme du deuxième et du quatrième, dont la différence entre le premier et le troisième est 1.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : un ruban de 66 cm de longueur, formé de quatre pièces de couleur, dont on ne connaît pas les longueurs mais des relations permettant de les déterminer.
- Comprendre l'information de la quatrième condition : le ruban peut être divisé en deux parties égales : l'une formée de R + J, l'autre de V + B chacune de 33 cm (66 : 2).
- Tirer de la troisième condition la longueur des rubans rouge et jaune qui, en cas d'égalité serait 16,5 cm, mais comme R = J – 1 on a alors R = 16 cm et J = 17 cm.
- De la première et de la quatrième conditions, les longueurs possibles de B et V sont respectivement 18, 19 ou 20 cm, et 33 – 18 = 15 ou 33 – 19 = 14 ou 33 – 20 = 13.
- On trouve alors les solutions

  pour R et J, une seule possibilité : R = 16 et J 17 ;

  pour V et B trois possibilités ; V = 13 si B = 20 ou V = 14 si B = 19 ou V = 15 si B = 18.

Ou procéder per essais, choisissant une valeur de R, ajouter 1 et trouver J, additionner ces deux nombres pour trouver R + J = V + B et se rendre compte que la somme des deux parties (ou le double d'une des deux) doit être 66. Si ce n'est pas le cas, procéder à un autre essai ou comprendre que R + J est la moitié de 66.

Ou après avoir compris que R + J = V + B, ce qui signifie que R + J = 66 : 2 = 33 utiliser une représentation graphique ou une écriture symbolique pour exprimer la relation R + J = R + R + 1 = 33 et en tirer R = 16 et J = 17.

Une fois connus R et J, comprendre que B, la plus longue, peut valoir 20, 19 ou 18 et trouver les valeurs de V correspondantes.

Attribution des points

4 Réponse correcte (R = 16 ; J = 17 ; V = 13 ou 14 ou 15 ; B = 20 ou 19 ou 18) avec les trois possibilités pour le couple V et B avec description claire de la démarche accompagnée des calculs nécessaires

3 Réponse correcte avec description partielle ou peu claire

ou seulement les longueurs des pièces (avec toutes les possibilités pour V et B) sans spécifier les relations entre V et B (par exemple R = 16 ; J = 17 ; V = 13 ou 14 ou 15 ; B = 18 ou 19 ou 20), mais avec description claire de la démarche

2 Réponse correcte sans description ni calculs

ou longueurs correctes pour R et J, et seulement deux couples de valeurs pour V et B (par exemple absence de 20 pour avoir mal interprété la condition « …ni plus de 20 ») avec description claire et calculs

ou présence d'une seule erreur de calcul, mais avec description claire

1 Réponse incomplète : longueurs correctes pour R et J, une seule possibilité trouvée pour le couple V et B

ou réponse qui ne tient pas compte de toutes les conditions

0 Incompréhension du problème

9. MODÈLES RÉDUITS (Cat. 41, 42)

Jean range ses 96 voitures dans trois boîtes (une petite, une moyenne et une grande).

- Il met trois fois plus de voitures dans la boîte moyenne que dans la petite boîte.
- Il met deux fois plus de voitures dans la grande boîte que dans la boîte moyenne.

Après avoir rempli les trois boîtes, il reste des voitures. Leur nombre est égal au tiers du nombre de voitures que Jean a mises dans la grande boîte.

Combien de voitures Jean a-t-il mis dans chaque boîte ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Partager 96 en quatre nombres proportionnels à 1, 2, 3 et 6.

Analyse de la tâche

- De la lecture de l'énoncé, comprendre qu'il y a quatre nombres de voitures à déterminer, celles contenues dans les trois boîtes et celles qui restent, dont la somme est 96 ; qu'aucun des nombres n'est connu et qu'il faudra recourir aux relations « double », « triple » et « tiers ».
- Remarquer que ces relations permettent d'exprimer chaque nombre en fonction de celui de la petite boîte et les traduire par, un « petit », un « moyen » qui est le triple du « petit » un « grand » qui est le double du « moyen » et un reste qui est le tiers du « grand ».
- En procédant par essais et ajustements progressifs on peut partir du nombre de la petite boîte, écrire les quadruplets possibles : 1, 3, 6, 2 (total 12), puis 2, 6, 12, 4 (total 24), ...et se rendre compte qu'il faut aller jusqu'à 8, 24, 48, 16 pour satisfaire la condition que la somme est 96.
- En procédant de manière plus synthétique (ou pré-algébrique) on peut laisser un des nombres indéterminé provisoirement (le petit par exemple) et calculer que la somme de 1 « petit », 3 « petits », 6 « petits », 2 « petits » représente 12 « petits » correspondant à 96. Il ne reste alors plus qu'à diviser 96 par 12 pour déterminer le nombre de voitures de la petite boîte 8, puis de déterminer les nombres des autres boîtes.
- Algébriquement : établir et résoudre l'équation où l'inconnue x est le nombre de voitures dans la petite boîte: $x + 3x + 6x + 2x = 96$. Dont la solution est 8.

Attribution des points

4 Réponse correcte (petite boîte : 8 voitures, boîte moyenne : 24 voitures, grande boîte : 48 voitures,) avec explications complètes et claires, par exemple essais organisés, ou la mention d'un total de 12 petites boîtes, ou un schéma faisant apparaître clairement l'unité commune

3 Réponse correcte et complète avec explications incomplètes ou peu claires (par exemple, la division 96 : 12 sans expliquer à quoi correspond 8, ou essais non organisés)

2 Réponse correcte sans explications

ou raisonnement correct avec une erreur de calcul dans la résolution

1 Début de recherche cohérente avec quelques tentatives ne menant pas à la solution

ou identification du nombre restant de modèles réduits.

0 Incompréhension du problème

10. TANGRAM (I) (Cat. 42)

Un menuisier construit des tangrams en bois.*

Un jour, un client lui commande un tangram dont le côté du petit carré mesure 6 cm.

Combien mesure un côté de ce tangram ?

Expliquez votre raisonnement.

** Le tangram (voir photo) est un puzzle très connu, originaire de la Chine Antique. Il s'agit d'un grand carré constitué de sept pièces, dont un petit carré, permettant de réaliser de très nombreuses figures.*

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir de la photo d'un Tangram et de ses sept pièces, trouver la mesure du côté du Tangram connaissant la mesure du côté de la petite pièce carrée (6 cm).

Analyse de la tâche

- Observer la photo et « voir » qu'il s'agit d'un puzzle de 7 pièces, constater qu'il y a cinq pièces en forme de triangle, que l'une est un carré (selon l'énoncé) et la dernière un quadrilatère.
- Analyser les rapports entre les côtés des pièces (Y a-t-il des côtés égaux ? des côtés dont la longueur est le double de celle d'un autre ?) puisque la seule donnée numérique est le côté du petit carré (6) et la question porte sur le côté du Tangram. Voir aussi qu'on peut s'intéresser aux aires des pièces, (Y a-t-il des pièces avec des aires égales ? des pièces dont l'aire est le double de celle d'une autre ?)

Il y a plusieurs manières de procéder :

a) reproduire le dessin en vraie grandeur à partir d'un carré de 6 cm de côté, dont on prolonge deux côtés perpendiculaires (qui deviendront les diagonales du Tangram), etc. Cette procédure permet d'arriver à la réponse 17 cm, à 1 mm près.

b) observer la figure, déduire que la diagonale du petit carré représente la moitié du côté du Tangram à construire. Au niveau 7 le théorème de Pythagore peut être déjà connu, calculer ainsi la mesure et la doubler, en arrondissant.

c) découper les pièces et procéder par déplacements et superpositions (translations, rotations, ...)

d) recourir, dans le cadre géométrique, à de simples déductions à partir des propriétés élémentaires des figures.

- Par exemple, voici quelques-unes de ces déductions (la pièce carrée est représentée par un carré)
  - de la position de ce carré => les deux grands et les deux petits triangles, voisins, sont rectangles,
  - les deux grands triangles étant rectangles => leur côté commun est sur la deuxième diagonale du Tangram => qui aboutit au sommet inférieur gauche et sépare le triangle moyen en deux triangles rectangles,
  - la diagonale « verticale » du petit carré le décompose en deux triangles rectangles => en glissant de 6 cm le demi carré de gauche le long de la diagonale du Tangram, il se superpose exactement au petit triangle du Tangram du haut à droite => ce petit triangle est un demi carré, ses côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et son grand côté (que nous appelons ici provisoirement « d » peut être estimé en mesurant la diagonale d'un carré de 6 cm de côté) » 8,5 cm => les demi-diagonales du Tangram ou les côtés de l'angle droit des grands triangles mesurent 12 cm.

On aboutit ainsi aux quatre longueurs possibles des côtés de sept pièces : 6 ou 12 ou « d » ou 2 ´ « d » (cm) ; en particulier les côtés des grands triangles rectangles mesurent, 12, 12, et 2 ´ « d » (cm) dont le dernier donnerait la

réponse au problème si on était en mesure de le calculer. Sinon, les élèves peuvent éventuellement dessiner un triangle rectangle isocèle avec des côtés égaux de 12 cm et mesurer l'autre côté, celui indiqué provisoirement par « d ».

Ou : passer par les aires des pièces à partir des déductions précédentes : en cm^2 celle du carré est 36, celle d'un petit triangle 18, celles du triangle moyen et du parallélogramme (composé de deux petits triangles) 36, celle de chacun des grands triangles 72, et finalement celle du Tangram 288 (avec le petit triangle comme unité on trouve 16 et 16 ´ 18 = 288). On peut aussi considérer que le triangle moyen est la moitié d'un carré, le quart du Tangram en bas à droite, dont l'aire est 72 (cm^2).

Dans un cas comme dans l'autre, il faut rechercher le côté d'un carré dont on connaît l'aire. Pour 288 c'est le nombre qui multiplié par lui-même donne 288, désigné par $\sqrt{288}$ mais donné par une de ses approximations » 17 ou 16,97 … Pour le côté du carré d'aire $\sqrt{72}$ » 8,5 ou 8,48… qu'il faudra multiplier par 2 pour arriver à la réponse.

Attribution des points

4 Réponse correcte (la mesure du côté du Tangram est, en cm, √288, ou une valeur numérique de 16,9 à 17,1cm en cas de détermination par dessin - avec présentation du dessin - ou » 17 ou 16,97 … par la calculatrice ou encore 12√2 - pour ceux qui auraient retenu la formule c√2), avec le détail de toutes les mesures intermédiaires trouvées - d'aires ou de longueurs - et quelques mots pour décrire la démarche comme, par exemple : les petits triangles sont la moitié du petit carré ou le côté du Tangram mesure le double de la diagonale du petit carré interne, avec une justification

3 Réponse correcte avec le détail de certaines mesures et description peu claire

2 Réponse correcte sans aucune explication ni détails de la procédure

ou réponse erronée (par exemple avec des erreurs de calcul), avec le détail de certaines mesures intermédiaires et description claire

1 Réponse qui se limite à l'aire du Tangram (288 cm^2)

ou mesure proche de 17 (inférieure à 16,8 ou supérieure à 17,1) sans présentation du dessin sur lequel a été prise la mesure

ou début de recherche cohérent avec quelques mesures ou relations trouvées entre les aires ou les côtés des figures

0 Incompréhension du problème

11. Le Petit Chaperon Rouge et le loup (I) (Cat. 42)

Le Petit Chaperon Rouge et le loup se rencontrent dans la forêt et se dirigent tous les deux vers la maison de la grand-mère.

Le Loup rit, très satisfait :

- Ah ! Ah ! Ah ! Ah ! Le Petit Chaperon Rouge fait deux pas pendant que je fais un bond qui vaut trois de ses pas. J'arriverai bien avant elle !

De son côté, le Petit Chaperon Rouge semble aussi très satisfaite :

- Cette fois-ci, le vieux tricheur ne pourra pas arriver avant moi parce que je connais un raccourci.

Le Petit Chaperon Rouge fait 92 pas en passant par le raccourci, alors qu'elle aurait fait 141 pas en passant par le chemin que le Loup a pris.

Qui arrivera en premier chez la grand-mère, le Loup ou le Petit Chaperon Rouge ?

Avec combien de pas d'avance ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer la durée nécessaire pour parcourir une distance de 141 pas à une vitesse de trois pas par unité de temps, à la durée nécessaire pour parcourir une distance de 92 pas à une vitesse de deux pas par unité de temps.

Analyse de la tâche

- Comprendre les données de l'énoncé en s'appuyant éventuellement sur un schéma :
  - La longueur d'un bond du loup est de 3 pas ;
  - Le Petit Chaperon Rouge (PCR) parcourt une distance de deux pas pendant que le loup effectue un bond,
- Procéder par essais pour mettre en correspondance, la distance en pas parcourue par le loup (3n) et celle parcourue par le petit chaperon rouge (2n), et organiser ces essais (le tableau suivant donne l'ensemble des essais)

Unité de temps	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	41	42	43	44	45	46
PCR	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	40	60	80	82	84	86	88	90	92
Loup	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	60	90	120	123	126	129	132	135	138

- Constater que PCR parcourt les 92 pas du raccourci pendant que les bonds du loup sur son chemin correspondent à 138 pas du PCR, qui arrivera donc le premier. Le loup aura encore 3 pas - ou un bond - à faire.

Ou : diviser par 3 les 141 pas du PCR pour déterminer combien il faudra de bonds au loup pour parcourir son chemin : 141 : 3 = 47 ; puis diviser par 2 les 92 pas nécessaires au PCR par son raccourci : 92 : 2 = 46. Pendant que le PCR fait 46 couples de pas, le loup fait 46 bonds. En conclure que le PCR arrive le premier avec un avantage de 3 de ses pas ou d'un bond du loup.

Ou : Raisonner par proportionnalité (intuitive) avec le rapport (2 pour 3) en pas du PCR, qui peut être transformé mentalement par multiplications et additions en (20 pour 30), (80 pour 120), (10 pour 15), (90 pour 135) et finalement (92 pour 138) qui permet de dire que lorsque le PCR a fait ses 92 pas, le loup en a fait 138 seulement et non encore 141.

Attribution des points

4 Réponse correcte (le Petit Chaperon Rouge arrive la première chez la grand-mère, avec 3 de ses pas d'avance sur le loup), avec une description claire de la démarche suivie : présentation des mises en correspondance entre les distances parcourues par le loup et par le petit chaperon rouge ou détails des calculs effectués

3 Réponse correcte (le PCR arrive la première chez la grand-mère, avec 3 de ses pas d'avance sur le loup) mais avec une description peu claire

2 Réponse correcte, sans explications

ou raisonnement correct mais avec une erreur de calcul

ou réponse incomplète (le PCR arrive la première), sans indication du nombre de pas en plus, avec une description claire de la démarche suivie, ou le détail des calculs dans lesquels soit 138 soit 141 apparaissent

1 Début de recherche cohérente (par exemple schéma ou début de liste mettant en correspondance des distances parcourues dans le même temps par le loup et le PCR)

ou réponse incomplète (le PCR arrive le premier), sans indication du nombre de pas en plus et sans description de la procédure

0 Incompréhension du problème

12. ÉGALITÉ À COMPLÉTER (Cat. 42)

L'enseignant a proposé à ses élèves de compléter cette égalité

$$..... \cdot 90 \cdot ..... = 1620$$

Il a donné les précisions suivantes. L'un des deux nombres à trouver

- s'écrit avec deux chiffres ;
- est compris entre 0 et 10 ;
- a comme dernier chiffre 5.

L'autre nombre manquant s'écrit aussi avec deux chiffres.

Écrivez tous les nombres qui peuvent être écrits à la place des pointillés pour que l'égalité soit vérifiée.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver toutes les paires de nombres positifs, dont le produit multiplié par 90 est 1620, tels qu'un des nombres est inférieur à 10 et s'écrit avec deux chiffres dont le dernier est 5.

Analyse de la tâche

- Comprendre que la partie gauche de l'égalité est un produit de trois facteurs dont un seul est connu (90) ; c'est à dire qu'il y a deux multiplications à effectuer : une première par un premier nombre et 90, une seconde par ce résultat et un deuxième nombre, dont le produit doit être 1620.
- Savoir que la multiplication est commutative et que, en cas de produits de trois nombres, l'opération est associative.

  Par exemple, dans cette expression on peut commuter les deux premiers nombres et associer ensuite les deux autres (encore inconnus) pour transformer l'expression de l'énoncé en 90 × (__ × __) = 1620, ou 90 × ... = 1620 et que le produit encore indéterminé se calcule par l'opération 1620 : 90 = 18.
- Comprendre que l'un des facteurs qui s'écrit avec deux chiffres en se terminant par 5 est obligatoirement de la forme ... , 5 et doit être choisi entre 0,5 ou 1,5 ou 2,5 ou 3,5 ; ... ; 9,5. La recherche consiste donc à trouver les quotients de 18 par un des nombres précédents, qui s'écrivent avec deux chiffres seulement.
- On trouve ainsi, après division, les paires de nombres solutions : (0,5 ; 36) ; (1,5 ; 12) ; (2,5 ; 7,2) ; (7,5 ; 2,4) ; toutes les autres paires doivent être exclues car ne répondant pas aux conditions données.

Attribution des points

4 Réponse correcte (les quatre paires possibles : (0,5 ; 36) ; (1,5 ; 12) ; (2,5 ; 7,2) ; (7,5 ; 2,4) (avec éventuellement les quatre paires « symétriques » (36 ; 0,5), (12 ; 1,5) ...) avec une description correcte et complète de la procédure utilisée (tous les calculs ou tentatives effectués)

3 Réponse correcte avec description incomplète de la procédure utilisée (absence de quelques calculs ou liste incomplète des essais)

2 Réponse partiellement correcte avec identification de 2 à 3 paires de nombres correctes et une description correcte de la procédure utilisée

ou les quatre paires avec une description correcte et complète de la procédure utilisée mais avec l'ajout d'une paire qui ne prend pas en compte les conditions requises (par exemple la paire 4,5 et 4 ou ...)

ou les nombres à insérer dans les espaces sont trouvés (0,5 ; 1,5 ; 2,4 ; 2,5 ; 7,2 ; 7,5 ; 12 ; 36) mais pas regroupés en paires

ou procédure correcte, mais mauvaise réponse due à une erreur de calcul

ou réponse correcte sans explication

1 Début correct de raisonnement permettant d'identifier une paire de nombres corrects

0 Incompréhension du problème