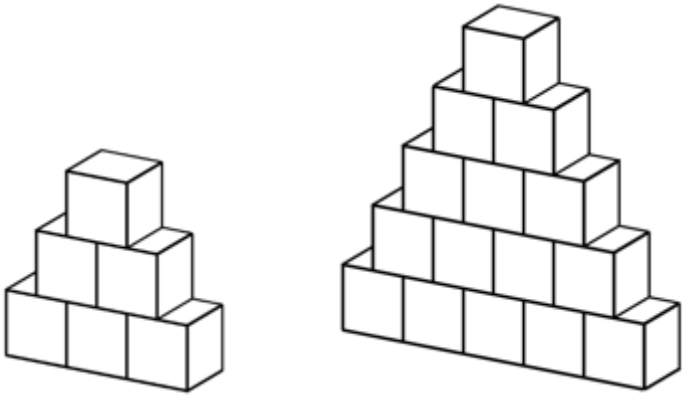
1. TOURS DE CUBES / WÜRFELTÜRME (I) (Cat. 31, 32)

Trois amis jouent à construire des "tours" avec des cubes.

Richard construit une tour de trois étages.

Claire construit une tour de cinq étages.



Tour de Richard *Tour de Claire*

Léa veut construire une tour de dix étages sur le même modèle que Richard et Claire. Quand elle a presque terminé sa tour, elle se rend compte qu'il lui manque deux cubes.

Combien de cubes Léa possède-t-elle ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Connaissant la régularité d'une suite de nombres naturels, calculer la somme de ses 10 premiers termes et trouver le nombre égal à la somme calculée diminuée de 2.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation :
  - observer les deux figures et percevoir les règles de construction des "tours" (construction d'étages avec des cubes adjacents, diminution de 1 du nombre de cubes à chaque étage suivant, symétrie de la construction, un seul cube au dernier étage car on ne peut pas placer d'autres cubes dessus sans casser la régularité) ;
  - comprendre que pour trouver le nombre total de cubes dans une tour, il faut additionner le nombre de cubes de chaque étage ;
  - comprendre que Léa n'a pas assez de cubes pour construire une tour de dix étages, il lui en manque deux.
- Construire quelques tours avec du matériel ou en dessinant et compter les cubes présents dans celle de 10 étages (55) et en déduire que Léa a 53 cubes car il en manque 2.

Ou

- Dans le champ numérique, notez la progression des cubes à chaque étage : entiers naturels qui se succèdent par ordre croissant à partir du haut 1 + 2 + 3 + 4 + ... ou par ordre décroissant à partir de la base ... + 4 + 3 + 2 + 1. Sachant que ces deux manières d'additionner des nombres sont équivalentes (commutativité) et comprendre qu'il y autant de cubes à la base de la tour que d'étages dans la tour (10 étages = 10 cubes au premier étage). Puis calculer la somme des dix nombres de 1 à 10, trouver 55 et soustraire 2 car il manque 2 cubes et arriver à la réponse 53.

  Il est également possible de procéder par calcul de sommes partielles successives qui donnent le nombre total de cubes en fonction du nombre d'étages (une approche qui peut être intéressante dans l'enseignement)

nombre d'étages	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nombre total de cubes dans la tour	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Il existe bien entendu d'autres procédures, combinant celles décrites ci-dessus.

Parmi les erreurs possibles, il faut noter l'oubli des deux cubes à supprimer (réponse : 55), la confusion entre addition et soustraction pour cette dernière opération (réponse : 57), erreurs de calcul de la somme des nombres de 1 à 10, et la tentation de s'arrêter à un certain nombre de cubes, par exemple pour une tour de 5 étages (15 cubes) et de le multiplier par 2 pour la tour de 10 étages (réponse : (2 × 15) – 2 = 28, en utilisant la procédure de proportionnalité irrégulière consistant à prendre le double).

Attribution des points

4 Réponse correcte (53 cubes) avec une description claire et complète (description de la construction de la tour ou représentation graphique complète ou présentation de tous les calculs pour trouver la somme des nombres de 1 à 10, ...)

3 Réponse correcte avec description incomplète ou peu claire (manque de quelques éléments d'explication)

2 Recherche cohérente avec une erreur de calcul, de représentation ou de construction
ou mauvaise réponse (57) avec une procédure claire et complète
ou réponse correcte sans description de la procédure
ou mauvaise réponse (55) qui ne prend pas en compte les deux cubes manquants, mais avec une procédure claire et complète

1 Début de recherche cohérente qui montre la compréhension du problème
ou réponse (55 ou 57) sans explication

0 Mauvaise compréhension du problème
ou erreur due à une "fausse proportionnalité" (réponse 28)

2. CAILLOUX (I) / STEINE (I) (Cat. 31, 32)

Jacques répartit 45 cailloux sur quatre boîtes.

Il met des cailloux dans la première boîte.

Dans la deuxième boîte, il met plus de cailloux que dans la première, mais moins que dans la troisième.

Dans la troisième boîte, il met le double du nombre de cailloux contenus dans la première boîte.

Dans la quatrième boîte, il met le triple du nombre de cailloux contenus dans la première boîte.

Combien de cailloux y a-t-il dans chaque boîte ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver quatre nombres dont la somme (45) est connue sachant que le troisième et le quatrième sont respectivement le double et le triple du premier et que le second est supérieur au premier et inférieur au troisième.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation et comprendre qu'on cherche quatre nombres dont la somme est 45 ;
  - le premier nombre n'est pas connu, mais on sait que, s'il est connu, on trouvera le troisième et le quatrième qui sont respectivement le double et le triple du premier ;
  - le deuxième nombre est supérieur au premier et inférieur au troisième.
- Procéder par essais et erreurs sur le premier nombre, en utilisant éventuellement du matériel ou des schémas.

  Par exemple, avec 5 comme premier nombre, trouver 10 et 15 comme troisième et quatrième. Calculer la somme de ces trois nombres (30) et remarquer qu'il manque 15 pour arriver à 45. Le deuxième nombre doit être supérieur à 5 et inférieur à 10 et ne peut donc pas être 15. Comprendre que 5 ne convient pas et faire un autre essai pour le premier nombre.

  Par exemple, avec 6 comme premier nombre, trouver 12 et 18, puis une somme de 36, donc il manque 9 pour atteindre 45. Le nombre 9 est supérieur à 6 et inférieur à 12 et donc approprié pour être le deuxième nombre.
- Vérifier qu'avec 7 comme premier nombre, on obtiendrait 14 et 21 et une somme de 42, donc il manquerait 3 pour atteindre 45, mais 3 n'est pas supérieur à 7.

Parmi les erreurs possibles, on peut s'attendre à ce que l'une des conditions ne soit pas remplie :

- les troisième et quatrième nombres ne sont pas le double et le triple du premier ;
- le deuxième nombre n'est pas supérieur au premier et inférieur au troisième ;
- la somme des quatre nombres n'est pas 45.

Attribution des points

4 Bonne réponse "6 cailloux dans la première boite, 9 dans la seconde, 12 dans la troisième et 18 dans la quatrième" avec une description des essais et des calculs effectués ou avec un dessin ou une description du matériel utilisé

3 Bonne réponse avec une description très partielle des calculs, sans explication, mais avec au moins un essai incorrect.

2 Réponse incorrecte mais cohérente, qui ne remplit que deux des trois conditions, avec description des essais (par exemple 5, 15, 10 et 15 avec le deuxième numéro erroné)
ou mauvaise réponse en raison d'erreurs de calcul mais avec une description complète de la procédure
ou réponse correcte sans explication

1 Début de recherche cohérent qui ne satisfait qu'à l'une des conditions ou ne montre que des essais inappropriés
ou mauvaise réponse car elle ne remplit que deux des conditions
ou mauvaise réponse en raison d'erreurs de calcul, sans description ni trace de recherche

0 Mauvaise compréhension du problème

3. L'HORLOGE DES PIRATES / DIE UHR DER PIRATEN (Cat. 31, 32)

A bord du bateau pirate, chaque pirate doit faire exactement 4 heures de garde à partir de minuit (00h00).

L'horloge sonne toutes les 30 minutes ainsi :

- 00h30 - 1 coup
- 01h00 - 2 coups
- 01h30 - 3 coups
- et ainsi de suite jusqu'à 04h00 - 8 coups.

Puis elle recommence : 04h30 - 1 coup, 05h00 – 2 coups, …

M. Mouche est le troisième à monter la garde. À un moment donné de son tour de garde, il entend l'horloge sonner cinq coups.

À quelle heure M. Mouche entend-il les cinq coups de l'horloge ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans une série de cycles de quatre heures, mettre en relation les nombres de 1 à 8 avec des intervalles de 30 minutes chacun pour trouver l'heure correspondant au nombre 5 du troisième cycle.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation : chaque tour de garde dure 4 heures ; l'horloge sonne toutes les demi-heures et, à partir de minuit, à la fin de chaque demi-heure, elle sonne chaque fois un coup en plus jusqu'à 8 coups, puis le cycle recommence ; le maître d'équipage fait le troisième tour et entend 5 coups.
- Comprendre qu'il s'agit d'un cycle formé de 8 intervalles de temps (demi-heures) et que, comme le maître d'équipage fait le troisième tour de garde, il faut considérer que les trois cycles sont tous pareils.
- Par de simples schématisations, faire correspondre les heures de la journée à partir de 00h00 avec le nombre de coups ; comprendre qu'un cycle complet, de 0 à 8 coups, se déroule en 4 heures, vérifier les horaires et la fin du premier tour

Heures	00h30	01h00	01h30	02h00	02h30	03h00	03h30	04h00
Coups	1	2	3	4	5	6	7	8

  À ce point, continuer avec cette représentation et déterminer l'horaire du deuxième tour de garde, qui se terminera à 8h00 lorsque le troisième tour commencera ; procéder de la même manière pour le troisième tour de garde et découvrir que l'horaire correspondant au chiffre 5 (coups) est 10h30.

Ou

- Comprendre que si chaque tour de garde est de 4 heures, alors le premier tour se termine à 4h00, lorsque le deuxième tour commence, que le deuxième tour se terminera à 08h00, heure à laquelle le maître d'équipage commence son tour de garde.
- Travailler sur le troisième tour et observer que, lorsque l'horloge sonne 5 coups, deux heures et demie ont passé, calculer qu'il sera alors 10h30.

Attribution des points

4 Réponse correcte (M. Mouche entend les cinq coups à 10h30), avec une description claire et complète de la procédure suivie (par exemple, tous les calculs ou une représentation graphique avec toutes les étapes nécessaires pour arriver à la réponse)

3 Réponse correcte, avec une description peu claire ou incomplète (par exemple, les passages qui mettent en relation les trois cycles sont manquants)
ou réponse erronée en raison d'une erreur de calcul dans le troisième tour de garde (exemple : 10h00 au lieu de 10h30) avec description claire et complète

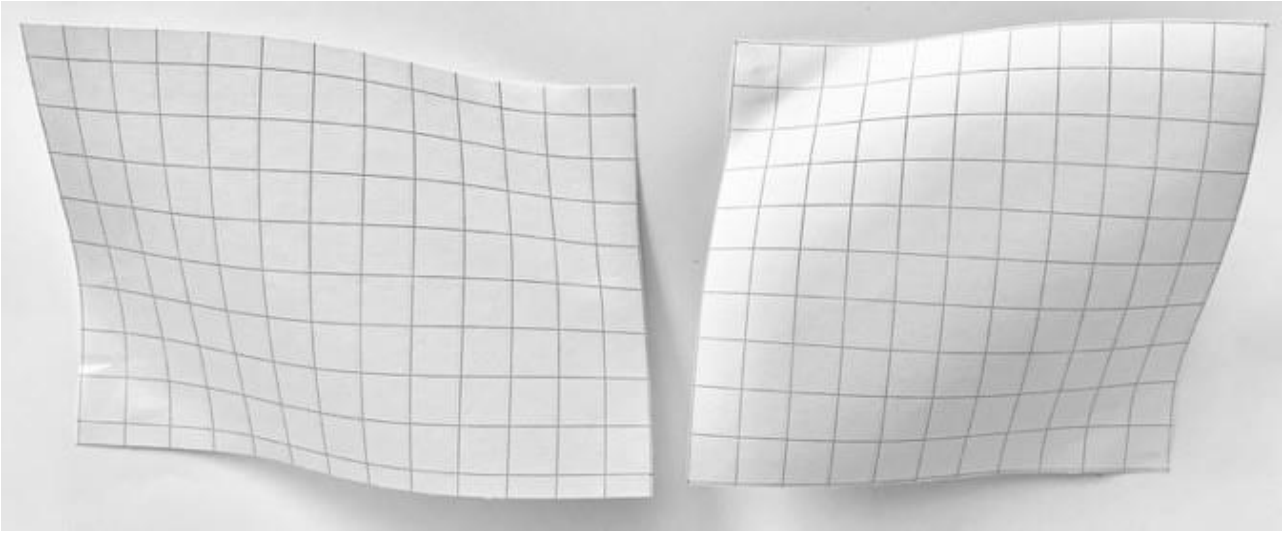
2 Réponse correcte sans aucune description

1 Début de raisonnement correct, par exemple d'autres correspondances nombre de coups / horaire après 05h00 ont été trouvées

0 Incompréhension du problème

4. RECTANGLES DE PAPIER QUADRILLÉ (I) / RECHTECKE AUS KAROPAPIER (I) (Cat. 31, 32)

Enrico et Giulia ont dessiné puis découpé deux rectangles dans une feuille quadrillée. Voici leurs rectangles.



rectangle d'Enrico *rectangle de Giulia*

Giulia a-t-elle utilisé plus de papier pour son rectangle, en a-t-elle utilisé moins ou en a-t-elle utilisé autant qu'Enrico ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les aires de deux rectangles de papier quadrillé en faisant les approximations nécessaires pour l'un d'eux.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : les deux rectangles ont été découpés dans le même rouleau donc ils ont le même quadrillage, il faut établir lequel des deux rectangles a la plus grande surface, à savoir celui qui contient le plus grand nombre de carrés.
- Observer les deux rectangles et se rendre compte que :
  - dans le rectangle d'Enrico, il y a à la fois des carrés entiers et des « parties » de carrés (sur deux de ses bords);
  - dans le rectangle de Giulia, il n'y a que des carrés entiers.
- Compter les carrés entiers en utilisant la stratégie la plus pratique, par exemple compter tous les carrés un par un (une procédure longue et pénible avec un risque élevé d'erreurs de comptage)

ou bien

- comprendre que toutes les lignes (et toutes les colonnes) ont le même nombre de carrés entiers. Ensuite, compter les carrés entiers qui sont sur une ligne (13 pour le rectangle d'Enrico et 11 pour celui de Giulia) et sur une colonne (8 pour le rectangle d'Enrico et 10 pour celui de Giulia) et puis trouver le nombre de tous les carrés entiers en multipliant les deux nombres obtenus pour chacun des deux rectangles : $13 \times 8 = 104$ (Enrico) et $10 \times 11 = 110$ (Giulia) (ou déterminer le nombre de carrés par des additions répétés du nombre de carrés sur les lignes ou sur les colonnes).
- Constater alors que le rectangle de Giulia a 6 carrés entiers de plus que celui d'Enrico et se rappeler cependant que Enrico a aussi des parties de carrés à ajouter aux 104 carrés entiers.
- Observer qu'il y a 13 « parties » de carrés sur la ligne supérieure et 13 sur la ligne inférieure et chercher à les regrouper pour former des carrés entiers. Par exemple, supposer qu'un carré est formé de deux « parties » ; dans ce cas, toutes les parties ensemble forment environ 13 carrés ; le rectangle d'Enrico a une superficie d'environ 117 (104 + 13) carrés, donc Enrico a utilisé plus de papier que Giulia.

Ou bien

- Supposer qu'un carré est formé de trois « parties » ; dans ce cas toutes les parties forment ensemble plus de 8 carrés. Donc le rectangle d'Enrico a plus de 112 (104 + 8) carrés. Ce qui confirme qu'Enrico a utilisé plus de papier que Giulia.

Ou bien

- Supposer qu'un carré est formé de quatre « parties » ; dans ce cas toutes les parties forment ensemble plus de 6 carrés. Donc le rectangle d'Enrico a plus de 110 (104 + 6) carrés. Et dans ce cas encore, Enrico a utilisé plus de papier que Giulia.

Ou bien

- Découper ou dessiner les deux rectangles sur papier quadrillé, correspondant visuellement, aux deux photos de l'énoncé, mesure leurs dimensions et calculer leur aire.

Attribution des points

4 Réponse correcte "Giulia a utilisé moins de papier" (ou une autre formulation ayant le même sens), avec une explication claire et complète de la stratégie adoptée ou tous les calculs nécessaires

3 Réponse "Giulia a utilisé moins de papier" avec explication peu claire ou manquante d'un passage ou d'un calcul

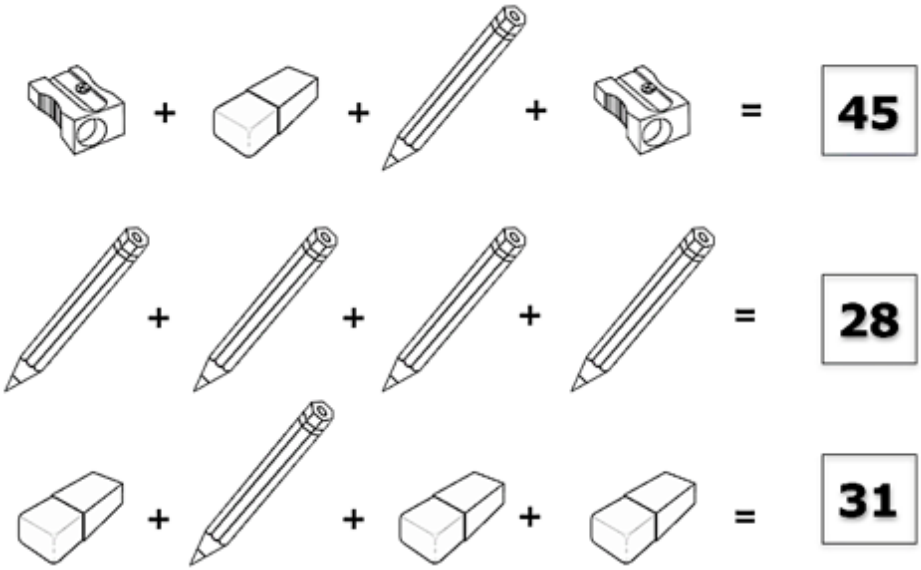
2 Réponse "Giulia a utilisé moins de papier", mais avec des erreurs de comptage et / ou de calcul
ou réponse incorrecte due à des erreurs de comptage ou de calcul, mais procédure correcte (par exemple considérer le rectangle de Giulia 10×10 en considérant le fait que les dimensions semblent égales à première vue)

1 Réponse "Giulia a utilisé moins de papier", sans explication
Ou début de recherche cohérente, par exemple seuls les carrés entiers ont été comptés.
ou réponse "Giulia a utilisé plus de papier" motivé par le fait que seuls les carrés entiers ont été comptés.

0 Incompréhension du problème (par exemple des affirmations qui indiquent des confusions entre l'aire et le périmètre, ou calculs à partir des dimensions prises sur les photos)

5. LES NOMBRES SECRETS / DIE GEHEIMEN ZAHLEN (Cat. 31, 32, 41)

Alex propose à ses camarades un jeu.
Il remplace les nombres par des objets.
Un même objet remplace toujours le même nombre.



À quel nombre correspond le taille-crayon ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres (a, b, c) connaissant les sommes $a + b + c + a$ (45), $c + c + c + c$ (28) et $b + c + b + b$ (31).

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : chaque objet correspond à un nombre qui est toujours le même quel que soit la place occupée au sein de l'addition ; le nombre à la fin de chaque ligne est égal à la somme des nombres qui correspondent aux objets
- Procéder par déductions :
  - comprendre qu'il faut partir de la deuxième somme car elle comporte toujours le même objet (quatre crayons) et elle est donc composée de termes égaux, ce qui permet de trouver la valeur d'un crayon : 28 ÷ 4 = 7 ou 4 × 7 = 28 ;
  - continuer avec la troisième somme dans laquelle le seul objet différent des autres est le crayon (dont la valeur est connue), soustraire la valeur du crayon du total (31 – 7 = 24) et en déduire que trois gommes valent 24 et puisque la valeur de chacune est la même, procéder comme pour les crayons : 24 ÷ 3 = 8 ou 8 × 3 = 24.
  - conclure en utilisant la première somme, en soustrayant du total la valeur totale du crayon et de la gomme pour obtenir la valeur de deux taille-crayons : 45 – 7 – 8 = 30 ou 7 + 8 = 15 et 45 – 15 = 30), puis en déduire la valeur d'un taille-crayon : 30 ÷ 2 = 15.

Ou

- Procéder par essais non organisés, en attribuant un nombre à chaque objet, puis vérifier si les nombres choisis rendent les trois égalités vraies.

Attribution des points

4 Réponse correcte "Le taille-crayon correspond au nombre 15" (ou formulation équivalente) avec une description claire de la valeur de chaque objet et de la procédure suivie (explication de l'ordre des étapes de raisonnement et des calculs ou essais)

3 Bonne réponse avec une description peu claire ou simple vérification des contraintes
ou valeur correcte de chaque objet, sans réponse explicite

2 Bonne réponse sans description de la procédure suivie
ou procédure correcte et bien expliquée, mais réponse incorrecte suite à une erreur de calcul
ou réponse "le taille-crayon correspond au nombre 30", avec une explication claire de la procédure suivie

1 Valeur du crayon correcte, avec des indications sur la procédure utilisée,
ou début d'un raisonnement correct (par exemple des essais qui mettent en évidence que la même valeur est attribuée à chaque objet dans deux égalités différentes)
ou réponse "le taille-crayon correspond au nombre 30, sans description de la procédure suivie

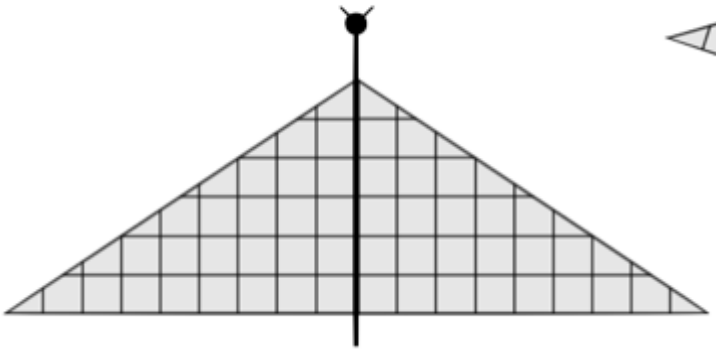
0 Incompréhension du problème

6. PAPILLONS / SCHMETTERLINGE (Cat. 32, 41, 42)

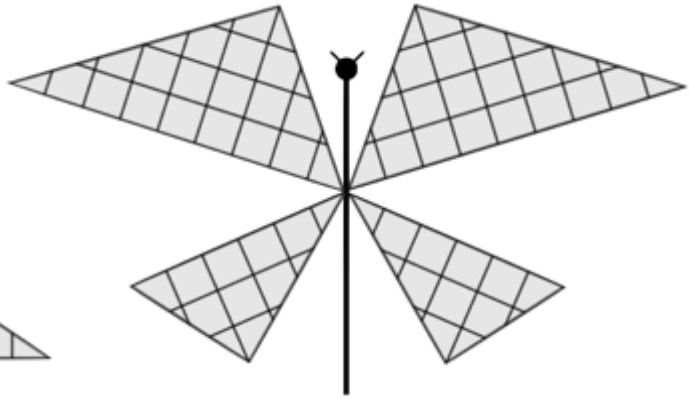
Laura et Paula bricolent des papillons.

Elles dessinent les ailes sur une feuille quadrillée et les découpent.

Voici les papillons de Laura et Paula.



Papillon de Laura



Papillon de Paula

Laura et Paula ont-elles utilisé la même quantité de carton quadrillé pour les ailes ou est-ce que l'une en a utilisé plus ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer l'aire d'un triangle rectangle, qui est la moitié d'un rectangle quadrillé (9 × 6), avec celle de deux autres triangles rectangles à joindre et qui permettent de reconstruire l'autre moitié du rectangle.

Analyse de la tâche

- Observer les figures et s'apercevoir que :
  - dans les deux papillons le corps est un axe de symétrie, la confirmation peut avoir lieu par le pliage des figures le long du "corps" de chaque papillon, en créant la superposition des ailes ;
  - les deux triangles du papillon de gauche (Laura) sont égaux ainsi que les deux couples de triangles du papillon de droite (Paola).
- Comprendre que pour résoudre le problème, il faut comparer les aires des ailes des deux papillons.

  De nombreuses procédures peuvent être suivies, par exemple :
  - découpage (manuel ou figuré) et superposition de toutes les ailes du papillon de droite sur les ailes du papillon de gauche ; découpage et juxtaposition d'une couple d'ailes différentes du papillon de droite (fig.1) et d'une aile du papillon de gauche, ou de la couple d'ailes du papillon de gauche avec les deux couples du papillon de droit (fig.2-3) et reconnaître la congruence par superposition ;

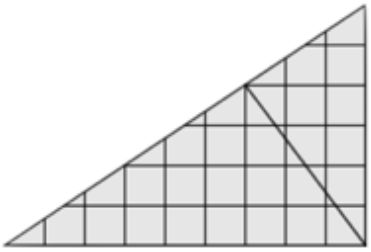


fig. 1

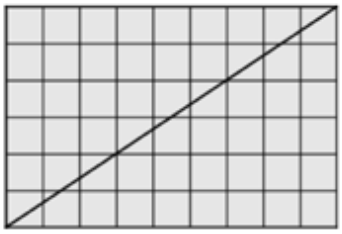


fig. 2

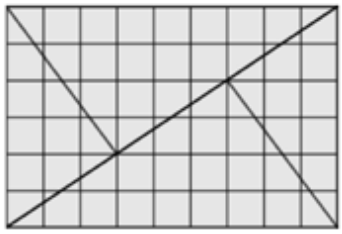


fig. 3

  - comptage des carreaux entiers puis les parties de carreaux du quadrillage (27 carreaux pour chacun des deux triangles du papillon de gauche ; 18 pour chacun des plus grands triangles et 9 pour chacun des plus petits triangles du papillon de droite).

  Le comptage un à un des carreaux avec compensation des carreaux non entiers est délicat et peut entraîner des erreurs.

- utilisation de la formule de l'aire du triangle, en choisissant, par facilité, la « base » et la « hauteur » qui suivent les lignes du quadrillage, compter le nombre de côtés de carreaux entiers présents sur les bases des triangles correspondant aux ailes, celui relatif aux hauteurs respectives pour la grande aile (9 × 6) / 2 = 27 ; pour la « grande des petites » "(9 × 4) / 2 = 18 et pour la « petite des petites » (6 × 3) / 2 = 9 ou prendre des mesures avec la règle graduée et calculer les aires en appliquant la formule.
- Établir finalement que les ailes du papillon de gauche ont la même aire que celles du papillon de droite.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Laura et Paula utilisent la même quantité de carton) avec découpage des ailes et comparaison par superposition/ juxtaposition précise des pièces ou avec comptage des carreaux ou calculs détaillés des aires

3 Réponse correcte mais avec des superpositions / juxtapositions inexactes (chevauchement de pièces ou espaces vides entre les pièces) ou calculs avec approximation ou comptages non détaillés.

2 Réponse erronée avec des superpositions / juxtapositions inexactes, ou erreurs dans le comptage / calcul des aires, mais procédure bien comprise ou mesures effectuées avec une bonne approximation.

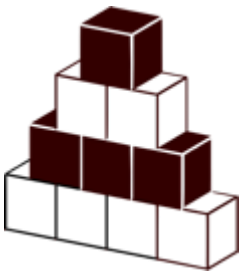
1 Réponse correcte sans montrer les procédures suivies ou réponse « On voit que ... »
ou début d'une recherche cohérente (par exemple : calcul de quelques aires ou identification du rectangle avec les triangles du papillon de gauche)

0 Incompréhension du problème

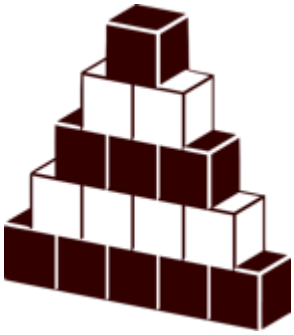
7. TOURS DE CUBES (II) / WÜRFELTÜRME (II) (Cat. 41, 42)

Trois amis construisent des tours avec des cubes blancs et des cubes noirs.

Voici deux des tours construites par les trois amis.



Tour de Richard



Tour de Claire

Léa décide alors de construire une tour de vingt-cinq étages avec les mêmes caractéristiques : un étage blanc alterne avec un étage noir et le sommet est formé par un seul cube noir.

Quelle est la différence entre le nombre de cubes blancs et le nombre de cubes noirs utilisés par Léa pour construire sa tour ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans la suite des nombres naturels de 1 à 25, calculer la différence entre la somme des nombres pairs et celle des nombres impairs.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation en observant les figures :
  - il faut construire des "tours" avec les cubes pour que chaque étage ait un nombre de cubes inférieur à 1 par rapport au précédent ;
  - les étages de chaque tour doivent être alternés, l'un formé uniquement de cubes noirs et l'autre formé uniquement de cubes blancs ;
  - le sommet des tours est constitué d'un cube noir.
- Construire ou dessiner la tour de 25 étages ou son début pour réaliser que le nombre de cubes noirs sera donné par la somme des nombres impairs de 1 à 25, sur la base des modèles fourni :
  dans la tour de Richard, il y a 1 + 3 = 4 cubes noirs et 2 + 4 = 6 cubes blancs, avec une différence de 2 ;
  dans la tour de Claire, il y a 1 + 3 +5 =9 cubes noirs et 2 + 4 = 6 cubes blancs, avec une différence de 3.
- Effectuer les calculs
  cubes noirs : 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + ... + 25 = 169
  cubes blancs : 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + ... 24 = 156
  différence : 169 – 156 = 13.

Ou

- Sans calculer les sommes décrites ci-dessus, calculer les différences une à une (25 – 24) + (23 – 22) + (21 – 20) + ... (il y a un cube supplémentaire dans les deux premiers étages, puis à nouveau un autre cube pour les deux suivants, ... donc il y a 12 cubes noirs supplémentaires pour les 12 premières paires d'étages auxquels il faut ajouter celui du haut de la tour : 12 + 1 = 13.

Ou

- Après avoir construit les tours de Richard (B – N = 2) et de Claire (N – B = 3), considérer la tour suivante et vérifier que la différence est toujours de 3. Considérer ensuite les deux suivantes et vérifiez que la différence entre le nombre des cubes noirs et celle des cubes blancs donne 4. Imaginer alors que les différences sont les mêmes pour les paires suivantes. Ensuite, procéder au décompte ou trouver une stratégie pour calculer sans écrire toutes les tentatives, par exemple 24/2 + 1, jusqu'à déterminer que la différence pour la tour à 25 étages est de 13 cubes.

Attribution des points

4 Bonne réponse (13) avec une explication claire et complète (construction des tours, représentation graphique et / ou tableau, détail de tous les calculs effectués, remarques claires ...) qui fait comprendre la procédure adoptée

3 Bonne réponse avec une explication incomplète ou peu claire
ou raisonnement complet et clair mais pas de réponse explicite

2 Bonne réponse sans aucune explication
ou réponse erronée ou manquante mais avec une compréhension claire de la relation couleur noir / impair et blanc / pair et une recherche cohérente avec une seule erreur de calcul, de représentation ou de construction
ou réponse correcte mais avec des couleurs inversées, c'est-à-dire le dessus blanc, les étages blancs / impairs et les étages pairs / noirs.

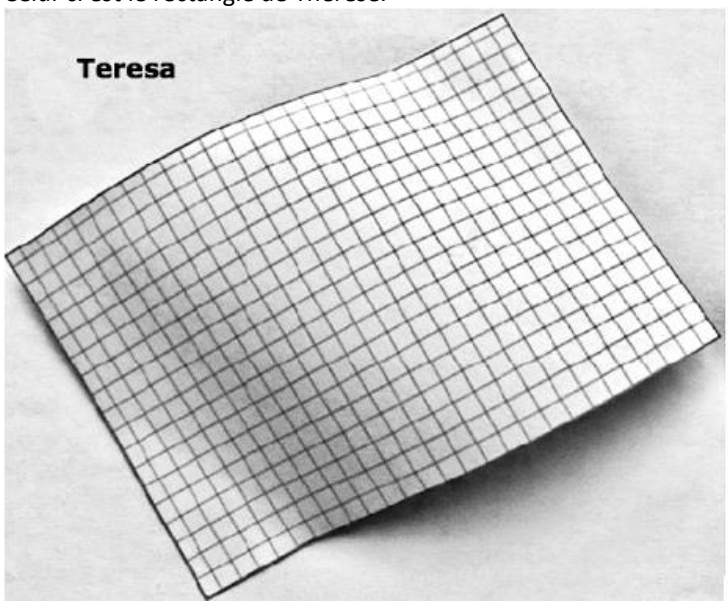
1 Début de recherche cohérente (compréhension de la relation couleur noire à la base / nombre impair d'étages et couleur blanche à la base / nombre pair d'étages attestant de la compréhension du problème)

0 Mauvaise compréhension du problème
ou erreur due à une fausse proportionnalité (réponse 15)

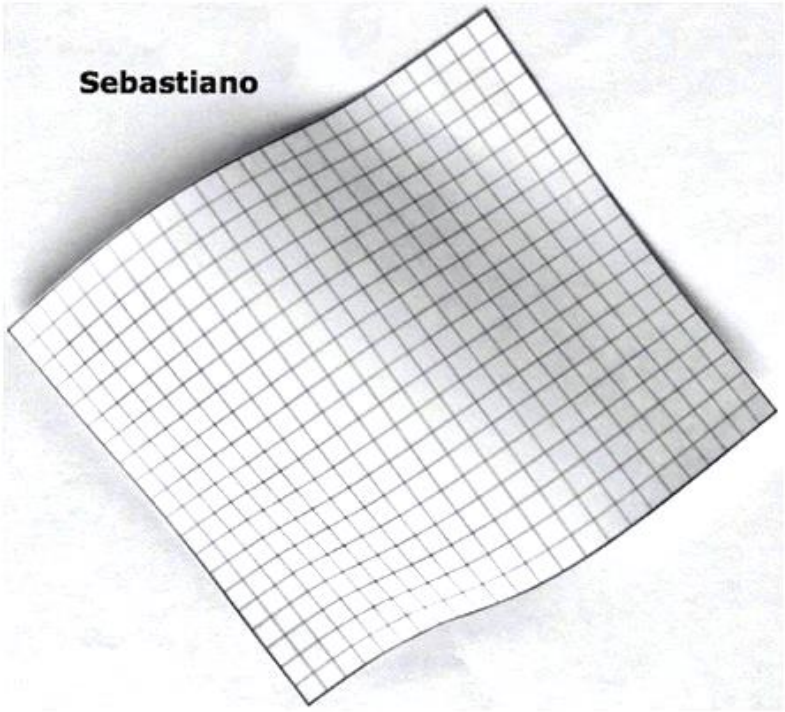
8. RECTANGLES DE PAPIER QUADRILLÉ (II) / RECHTECKE AUS KAROPAPIER (II) (Cat. 41, 42)

Thérèse et Sebastiano ont dessiné puis découpé deux rectangles dans une feuille quadrillée.

Celui-ci est le rectangle de Thérèse.



Et ceci est le rectangle de Sebastiano.



Thérèse a-t-elle utilisé plus de papier pour son rectangle, en a-t-elle utilisé moins ou en a-t-elle utilisé autant que Sebastiano ?
Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les aires de deux rectangles de papier quadrillé en faisant les approximations nécessaires pour l'un d'eux.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : les deux rectangles ont été découpés dans la même feuille donc ils ont le même quadrillage, il faut établir lequel des deux rectangles a la plus grande surface, à savoir celui qui contient le plus grand nombre de carrés.
- Observer les deux rectangles et se rendre compte que :
  - dans le rectangle de Thérèse, il y a à la fois des carrés entiers et des « parties » de carrés (sur deux de ses bords) ;
  - dans le rectangle de Sebastiano, il n'y a que des carrés entiers.
- Compter les carrés entiers en utilisant la stratégie la plus pratique, par exemple
  - compter tous les carrés un par un (une procédure longue et pénible avec un risque élevé d'erreurs de comptage)

  ou bien
  - comprendre que toutes les lignes (et toutes les colonnes) ont le même nombre de carrés entiers. Ensuite, compter les carrés entiers qui sont sur une ligne (26 pour le rectangle de Thérèse et 24 pour celui de Sebastiano) et sur une colonne (18 pour le rectangle de Thérèse et 20 pour celui de Sebastiano) et puis trouver le nombre de tous les carrés entiers en multipliant les deux nombres obtenus pour chacun des deux rectangles : 26 × 18 = 468 (Thérèse) et 24 × 20 = 480 (Sebastiano) (ou déterminer le nombre de carrés par des additions répétés du nombre de carrés sur les lignes ou sur les colonnes).
- Constater alors que le rectangle de Sebastiano a 12 carrés entiers de plus que celui de Thérèse et se rappeler cependant que Thérèse a aussi des parties de carrés à ajouter aux 468 carrés entiers.
- Observer qu'il y a 26 « parties » de carrés sur la ligne supérieure, 18 sur la colonne de gauche et un dans l'angle en haut à gauche et chercher à les regrouper pour former des carrés entiers. Par exemple, supposer que chaque partie du carré est environ un tiers (ou plus) d'un carré, donc on peut ajouter plus de $(26 + 18): 3 = 44: 3 \cong 14$ carrés entiers aux 468 entiers, ce qui fait 482 carrés. Conclure que Thérèse a utilisé plus de papier que Sebastiano.

Ou bien

- Découper ou dessiner les deux rectangles sur papier quadrillé, correspondant visuellement, aux deux photos de l'énoncé, mesure leurs dimensions et calculer leur aire.

Attribution des points

4 Réponse correcte "Thérèse a utilisé plus de papier" (ou une autre formulation ayant le même sens), avec une explication claire et complète de la stratégie adoptée ou tous les calculs nécessaires

3 Réponse correcte avec explication peu claire ou manquante d'un passage ou d'un calcul

2 Réponse correcte, mais avec des erreurs de comptage et / ou de calcul

ou réponse incorrecte due à des erreurs de comptage ou de calcul, mais procédure correcte

1 Réponse correcte sans explication

ou début de recherche cohérente, par exemple seuls les carrés entiers ont été comptés.

ou réponse " Sebastiano a utilisé plus de papier" motivé par le fait que seuls les carrés entiers ont été comptés.

0 Incompréhension du problème (par exemple des affirmations qui indiquent des confusions entre l'aire et le périmètre, ou calculs à partir des dimensions prises sur les photos)

9. QUEL PERSONNAGE CHOISISSEZ-VOUS ? / LIEBLINGSFIGUR (Cat. 41, 42)

Lors d'une enquête, les 26 élèves choisissent chacun un seul personnage parmi :

Mickey, Donald, Dingo et Oncle Picsou.

21 enfants n'ont pas choisi Dingo.

22 enfants n'ont pas choisi Oncle Picsou.

Les enfants qui ont choisi Donald sont 3 de plus que ceux qui ont choisi Mickey.

Combien d'enfants ont choisi Mickey, combien ont choisi Donald, combien ont choisi Dingo et combien ont choisi Oncle Picsou ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Réaliser la partition d'un ensemble dont le nombre d'éléments (26) est connu en quatre sous-ensembles, dont deux sont définis par une négation et les deux autres par une comparaison (dans l'un il y a 3 éléments de plus que l'autre)

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation pour comprendre que les 26 élèves doivent être répartis en quatre ensembles (disjoints) selon leur choix : Mickey, Donald, Dingo (Goofy) et Oncle Picsou (Dagobert)
- La tâche consiste alors à déterminer les nombres de ces ensembles :
  - 21 n'ont pas choisi Dingo (Goofy) signifie que 21 sur 26 "n'appartiennent" pas à l'ensemble de Dingo (Goofy) mais aussi que 5 y appartiennent ; de même, 22 n'ont pas choisi Oncle Picsou (Dagobert), signifie que 22 sur 26 "n'appartiennent" pas à l'ensemble d'Oncle Picsou (Dagobert) et que 4 y appartiennent.
  - Il reste 17 élèves (26 – 5 – 4) qui « appartiennent aux deux autres ensembles : ceux qui ont choisi Donald sont 3 de plus que ceux qui ont choisi Mickey.
  - Pour trouver les deux nombres dont la somme est 17 et la différence est 3, on peut procéder par essais … 5 + (5 + 3) ; 6 + (6 + 3) ; jusqu'à 7 + (7 + 3) = 17 (ou …12 + (12 – 3) … jusqu'à 10 + (10 – 3) = 17) ; c'est-à-dire 7 et 10 ou 10 et 7.

    Ou chercher toutes les paires de nombres dont la somme est 17 : (1 ; 16), (2 ; 15, (3 ; 14, ...) et identifier celle dont les éléments diffèrent de 3 : (7 ; 10)

    Ou raisonner sur les nombres (en s'aidant éventuellement d'une représentation graphique : si de 17 on retire le 3 de différence on obtient 14 qui est le double du petit, c'est-à-dire 7, le grand étant 10.
- La réponse est donc Mickey 7, Donald 10, Dingo (Goofy) 5, Oncle Picsou (Dagobert) 4.

Attribution des points

4 Bonne réponse « Mickey 7, Donald 10, Dingo (Goofy) 5, Oncle Picsou (Dagobert) 4 » avec une description claire et complète de la procédure (avec toutes les schématisations graphiques ou les calculs nécessaires)

3 Réponse correcte avec description partielle ou peu claire de la procédure suivie (absence de certaines étapes ou avec seulement une vérification)

2 Bonne réponse sans explication

ou réponses correctes pour Dingo (Goofy) et Oncle Picsou (Dagobert) et début d'une recherche correcte pour les autres, sans parvenir à la conclusion, mais la compréhension de la relation entre Donald et Mickey est comprise.

1 Bonnes réponses uniquement pour Dingo (Goofy) et Oncle Piscou (Dagobert)

ou début d'un raisonnement correct, par exemple une représentation ou un calcul montrant une compréhension de la situation sans être en mesure de trouver une stratégie de solution appropriée

0 Incompréhension du problème

10. **CAILLOUX (II) / STEINE (II)** (Cat. 41, 42)

Jacques répartit 57 cailloux sur cinq boîtes.

Dans la troisième boîte, le nombre de cailloux est le double de celui de la première boîte.

Dans la deuxième boîte, il y a plus de cailloux que dans la première et moins que dans la troisième.

Dans la cinquième boîte, le nombre de cailloux est le triple de celui des cailloux de la première boîte.

Dans la quatrième boîte, il y a plus de cailloux que dans la troisième et moins que dans la cinquième.

Combien de cailloux peut-il y avoir dans chaque boîte ?

Indiquez toutes les manières de répartir les cailloux dans les boîtes.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver cinq nombres dont la somme est connue (57) sachant que le troisième et le cinquième sont respectivement le double et le triple du premier, que le second est supérieur au premier et inférieur au troisième et que le quatrième est supérieur au troisième et inférieur à du cinquième.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation et comprendre qu'il faut chercher cinq nombres selon les indications données : leur somme est 57 ; le premier nombre n'est pas connu ; les troisième et cinquième nombres sont respectivement le double et le triple du premier ; le deuxième nombre est supérieur au premier et inférieur au troisième ; le quatrième nombre est supérieur au troisième et inférieur au cinquième.
- Procéder par essais et erreurs sur le premier nombre. Par exemple, avec 5, il y a 10 et 15 comme troisième et cinquième. Calculer la somme de ces trois premiers nombres (30) et trouvez qu'il manque 27 pour arriver à 57. Le deuxième nombre, supérieur à 5 et inférieur à 10 pourrait être 6, 7, 8 ou 9 et le quatrième nombre pourrait être 12, 12, 13 ou 14. Note ensuite que ces nombres ne sont pas bons car les deux plus grands (9 et 14) n'atteignent pas 27.

  Faire un autre essai pour le premier nombre. Par exemple, avec 6, on trouve 12 et 18 avec une somme de 36 et 21 est manquant pour arriver à 57. Le deuxième nombre pourrait être 7, 8, 9, 10 ou 11, le quatrième nombre pourrait être 13, 14, 15, 16 ou 17. Il existe deux solutions en choisissant 7 et 14 comme deuxième et quatrième nombre ou 8 et 13, dans les deux cas la somme sera de 21.
- Vérifier si nécessaire qu'en prenant 7 comme premier nombre, on obtiendrait 14 et 21 et une somme de 42, il manquerait 15 pour arriver à 57, mais la somme des deuxième et quatrième serait supérieure à 15 (8 + 15) et donc l'essai ne serait pas correct.
- Les deux solutions sont donc (6, 7, 12, 14, 18) et (6, 8, 12, 13, 18)

Parmi les erreurs possibles, on peut s'attendre à ce que l'une des trois conditions ne soit pas remplie :
- les troisième et cinquième nombres ne sont pas le double et le triple du premier ;
- le deuxième nombre n'est pas supérieur au premier et inférieur au troisième et le quatrième n'est pas supérieur au troisième et inférieur au cinquième ;
- la somme des cinq nombres n'est pas 57.

Attribution des points

4 Bonne réponse (6, 7, 12, 14, 18) et (6, 8, 12, 13, 18) avec description des essais et calculs effectués (indiquant au moins un essai inacceptable avec l'explication de la raison pour laquelle le nombre ne convient pas). Dans le cas du choix 6 comme premier essai pour le premier nombre et la découverte des deux autres, une vérification avec un autre choix est requise

3 Bonne réponse avec description partielle des calculs ou sans explication

ou une solution unique (6, 7, 12, 14, 18 ou 6, 8, 12, 13, 18) avec une description des essais et des calculs effectués (indiquant au moins un essai inacceptable avec l'explication de la raison pour laquelle le nombre ne convient pas)

2 Une seule solution (ou 6, 7, 12, 14, 18 ou 6, 8, 12, 13, 18) sans explication

ou mauvaise réponse, mais cohérente, ne respectant que deux des trois conditions, avec description des essais (par exemple 5, 9, 14, 14 et 15 avec une somme de 53)

1 Début de la recherche cohérente (montre la compréhension des conditions à remplir sans parvenir à une conclusion) ou une ou deux solutions qui ne remplissent qu'une des trois conditions ou qui ne montrent que des essais inappropriés

0 Mauvaise compréhension du problème

11. CERISES / KIRSCHEN (Cat. 41, 42)

Fabien, Livia et Albert comptent les cerises que chacun a récoltées et découvrent que :

- Livia a 20 cerises de plus que Fabien.
- Il manque 5 cerises à Albert pour atteindre le double de celles récoltées par Fabien.
- Il y a en tout 103 cerises.

Combien de cerises chacun a-t-il récoltées ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres entiers, sachant que le deuxième nombre vaut 20 de plus que le premier, qu'il manque 5 au troisième pour arriver au double du premier et que la somme de ces trois nombres est 103. B = A + 20 ; C = 2A – 5 ; A + B + C = 103

Analyse de la tâche

- Quitter le contexte des cerises et percevoir les trois nombres encore inconnus (F, L et A) et leurs trois relations : L : 20 de plus que F ; A : 5 de moins que le double de F ; la somme des trois nombres est 103.
- La procédure par essais organisés progressivement convient parfaitement pour des élèves qui n'ont pas encore de connaissances algébriques, par exemple, en partant d'une valeur pour F on calcule les deux autres au moyen des deux premières relations ci-dessus :

  si F = 10, L = 30 (10 + 20), A = 15 (2x10 – 5) et au total 10 + 30 + 15 = 55, ce qui est insuffisant,

  si F = 20, L = 40, A = 35, au total 95, on s'approche,

  pour arriver à : F = 22, L = 42, A = 39 ; 22 + 42 + 39 = 103.

  Cette procédure peut être plus ou moins développée, de trois essais comme dans l'exemple à tous les essais envisageables (liste ou tableau), avec l'idée naissante de variable et de fonction qui pourra faire partie des exploitations didactiques futures.
- Une procédure plus générale peut être favorisée par la manière dont l'énoncé exprime les relations, où les nombres de L et de A sont donnée en référence à celui de F. En langage de l'élève (forme rhétorique) on peut considérer que le nombre de F, additionné au nombre de F plus 20 (nombre de L) puis au double du nombre de F moins 5 (nombre de A) représente quatre fois le nombre de F plus 15 (20 – 5) et que cette somme est égale à 103. A ce moment on peut déduire de la différence entre 15 et 103 : 88, que quatre fois le nombre de F est 88 et que le nombre de F est 22.

  Ce type de procédure peut être accompagné de symboles représentant le nombre de F (un carré, un segment, un « F » …) pour « visualiser » la grandeur inconnue, répétée quatre fois, et les deux nombres 15 et 103. Le modèle des deux plateaux d'une balance peut aussi être utile.
- La procédure algébrique ne fait que traduire la formulation précédente, en une équation du genre : F + F + 20 + (2F − 5) = 103.

Parmi les obstacles, on peut relever la difficulté à choisir un des trois nombres pour commencer les essais.

Il peut y avoir des réponses erronées dues à la prise en compte de deux seulement des trois relations. Par exemple avec la première et la troisième, si le choix du nombre de F est 10, le nombre de L est 30, la somme des deux est 40 et, sans tenir compte de la deuxième relation A serait 103 – 40 = 65.

Une autre erreur possible est de considérer que : « Comme il manque 5 au troisième pour arriver au double du premier alors C – 5 = 2 A ».

Attribution de points

4 Réponse correcte (Fabien 22 ; Livia 42, Albert 39) avec une explication claire et complète (les essais à rejeter et l'essai retenu correct comme vérification clairement identifié ou procédure plus générale comme dans l'analyse précédente ou encore autre explication convaincante)

3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes (par exemple les calculs et essais sans explications) ou réponse 22 - 42 - 39 avec une explication claire sans préciser les noms F, L et A

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse incorrecte en raison d'une erreur de calcul mais avec procédure correcte

1 Début de recherche correct (par exemple : les données concernant les relations ont été comprises et représentées correctement ; la procédure par essais a été mise en œuvre sans parvenir à la bonne réponse)

ou une réponse cohérente mais ne tenant compte que de deux conditions, (du genre de celle de l'exemple)

0 Incompréhension du problème

12. GABRIELLE LA PETITE SORCIÈRE / DIE HEXE GABRIELLE (Cat. 42)

Gabrielle, la petite sorcière, prépare une potion magique pour remettre en forme ses elfes. Selon son livre de magie, il faut mélanger exactement 800 g de poudre de champignons bleus à 1000 g de lait de licorne.

Distraite par son bâton magique, Gabrielle réalise qu'elle a inversé les deux quantités : elle a dissous 1000 g de poudre de champignons bleus dans 800 g de lait de licorne. Comme la poudre de champignons bleus est difficile à trouver au pays des elfes, Gabrielle décide de ne pas jeter sa préparation.

Quel ingrédient Gabrielle devra-t-elle ajouter et en quelle quantité pour obtenir une potion qui respecte la recette du livre de magie ?

Expliquez votre raisonnement.

Analyse a priori

Tâche mathématique

Travailler sur une situation de proportionnalité : modifier une recette à deux ingrédients en calculant la masse de ce qu'il faut ajouter pour rétablir la proportion correcte

Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour respecter la recette, la proportion de poudre et de lait dans la potion doit être la même que celle de la recette originale.
- Comprendre qu'après avoir inversé les quantités, on doit conserver la quantité de poudre de champignon bleu et ajouter du lait de licorne.
- Pour trouver la quantité de lait à ajouter il faut partir de la recette « 800 g de poudre du champignon bleu pour 1 000 g de lait de licorne » et chercher le mélange final contenant « une quantité encore inconnue de lait et 1 000 g de poudre » c'est-à-dire passer du couple : (800 ; 1 000) au couple (1 000 ; *x*). Les quatre quantités se correspondant deux à deux, on peut les disposer en ligne, en colonne, en tableau, …
- Il faut alors tenir compte du fait que, dans une situation de « recette », c'est le rapport 1 000/800 = 5/4 = 1,25 qui est conservé et non la différence (1 000 – 800 = 200) qui conduirait à l'erreur 1 000 + 200 = 1 200. La quantité totale de lait doit donc être 1,25 fois celle de la poudre : 1,25 × 1 000 g= 1 250 g.
- Déduire alors les 800 g de lait déjà contenus dans le mélange et trouver le lait à ajouter : 1 250 − 800 = 450 (en g)

Remarque : 1,25 est le coefficient de proportionnalité du tableau qui suit.

Ou

- Décomposer le passage en plusieurs étapes, avec éventuellement le passage à l'unité, selon les propriétés de la proportionnalité qui conservent le rapport :

Masse de poudre en g	Masse de lait en g
800	1 000
400	500
100	125
1	**1,25 = 5/4**
…	…
1 000	1 250

Ou

Raisonner sur la quantité totale d'ingrédients (1 000 + 800 = 1 800 g) et travailler sur le rapport 800/1 800 = 4/9 pour trouver la quantité totale (1 000/x = 4/9 c'est-à-dire x = 2 250) en utilisant un tableau ou un coefficient de proportionnalité. Après avoir calculé le total, soustraire la quantité de poudre de champignons, c'est-à-dire 2 250 – 1 000 = 1 250, et finalement soustraire la quantité de lait déjà utilisée 1 250 − 800 = 450 g.

Attribution des points

4 Réponse correcte (ajouter 450 g de lait à la potion) avec explications claires et complètes (tous les calculs explicités de manière qu'il soit bien clair que le rapport entre les grandeurs est constant)

3 Réponse correcte avec explications peu claires (calculs incomplets ou inexpliqués)

ou réponse 1 250 de lait = 1,25 × 1 000 g, qui ne tient pas compte du fait que dans la mauvaise préparation il y a déjà 800 g de lait, avec une explication claire et complète : prenant en compte qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse 1 250 g de lait avec une explication incomplète

1 Début de raisonnement correct, par exemple explication que des rapports entre des masses d'ingrédients doivent être égaux

0 Incompréhension du problème ou réponse 200 g de lait (c'est-à-dire 1 000 – 800 = 200) due à une confusion entre conservation de la différence et conservation du rapport