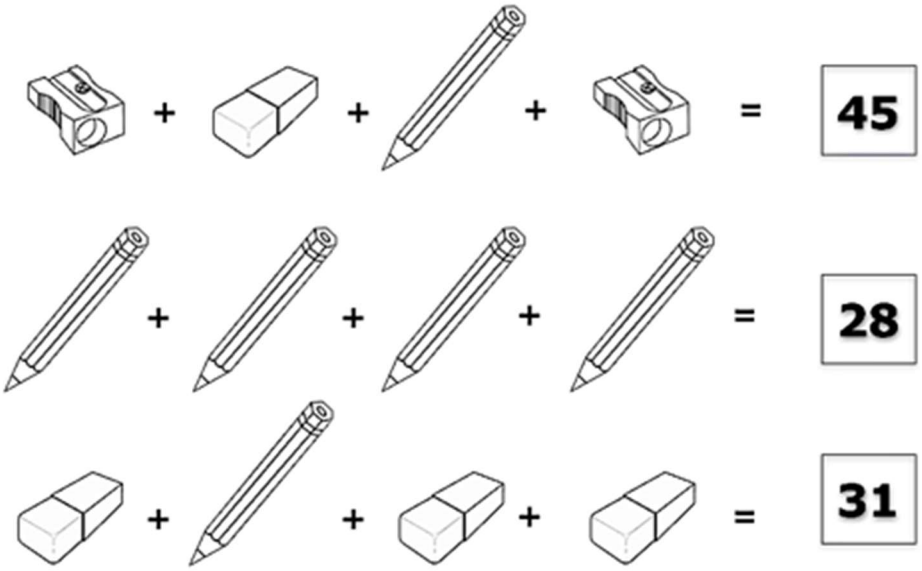
A. LES NOMBRES SECRETS / DIE GEHEIMEN ZAHLEN (Cat. 72)

Alex propose à ses camarades un jeu.
Il remplace les nombres par des objets.
Un même objet remplace toujours le même nombre.



À quel nombre correspond le taille-crayon ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres (a, b, c) connaissant les sommes $a + b + c + a$ (45), $c + c + c + c$ (28) et $b + c + b + b$ (31).

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : chaque objet correspond à un nombre qui est toujours le même quel que soit la place occupée au sein de l'addition ; le nombre à la fin de chaque ligne est égal à la somme des nombres qui correspondent aux objets
- Procéder par déductions :
  - comprendre qu'il faut partir de la deuxième somme car elle comporte toujours le même objet (quatre crayons) et elle est donc composée de termes égaux, ce qui permet de trouver la valeur d'un crayon : 28 ÷ 4 = 7 ou 4 × 7 = 28 ;
  - continuer avec la troisième somme dans laquelle le seul objet différent des autres est le crayon (dont la valeur est connue), soustraire la valeur du crayon du total (31 – 7 = 24) et en déduire que trois gommes valent 24 et puisque la valeur de chacune est la même, procéder comme pour les crayons : 24 ÷ 3 = 8 ou 8 × 3 = 24.
  - conclure en utilisant la première somme, en soustrayant du total la valeur totale du crayon et de la gomme pour obtenir la valeur de deux taille-crayons : 45 – 7 – 8 = 30 ou 7 + 8 = 15 et 45 – 15 = 30), puis en déduire la valeur d'un taille-crayon : 30 ÷ 2 = 15.

Ou

- Procéder par essais non organisés, en attribuant un nombre à chaque objet, puis vérifier si les nombres choisis rendent les trois égalités vraies.

Attribution des points

4 Réponse correcte "Le taille-crayon correspond au nombre 15" (ou formulation équivalente) avec une description claire de la valeur de chaque objet et de la procédure suivie (explication de l'ordre des étapes de raisonnement et des calculs ou essais)

3 Bonne réponse avec une description peu claire ou simple vérification des contraintes
ou valeur correcte de chaque objet, sans réponse explicite

2 Bonne réponse sans description de la procédure suivie

ou procédure correcte et bien expliquée, mais réponse incorrecte suite à une erreur de calcul
ou réponse "le taille-crayon correspond au nombre 30", avec une explication claire de la procédure suivie

1 Valeur du crayon correcte, avec des indications sur la procédure utilisée,
ou début d'un raisonnement correct (par exemple des essais qui mettent en évidence que la même valeur est attribuée à chaque objet dans deux égalités différentes)
ou réponse "le taille-crayon correspond au nombre 30, sans description de la procédure suivie

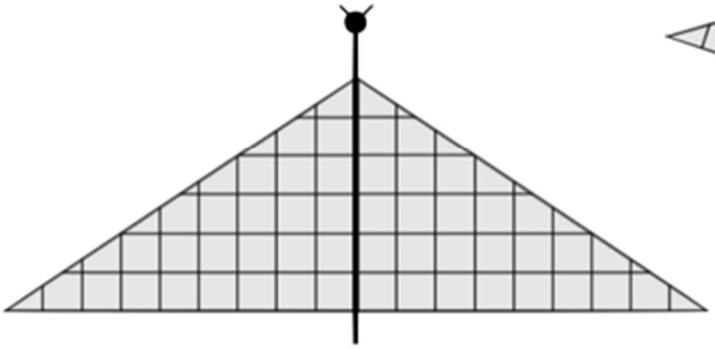
0 Incompréhension du problème

B. PAPILLONS / SCHMETTERLINGE (Cat. 72, 82)

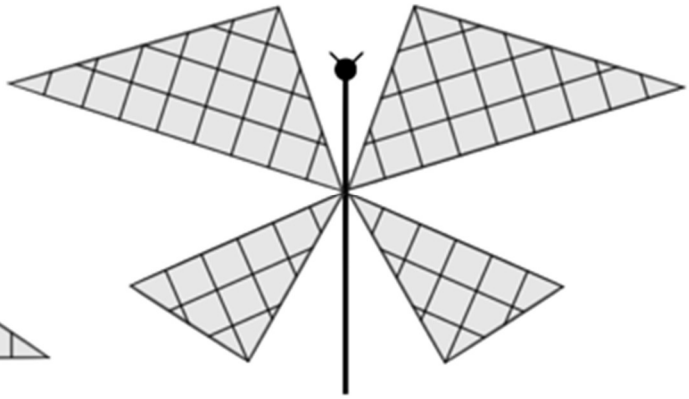
Laura et Paula bricolent des papillons.

Elles dessinent les ailes sur une feuille quadrillée et les découpent.

Voici les papillons de Laura et Paula.



Papillon de Laura



Papillon de Paula

Laura et Paula ont-elles utilisé la même quantité de carton quadrillé pour les ailes ou est-ce que l'une en a utilisé plus ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer l'aire d'un triangle rectangle, qui est la moitié d'un rectangle quadrillé (9 × 6), avec celle de deux autres triangles rectangles à joindre et qui permettent de reconstruire l'autre moitié du rectangle.

Analyse de la tâche

- Observer les figures et s'apercevoir que :
  - dans les deux papillons le corps est un axe de symétrie, la confirmation peut avoir lieu par le pliage des figures le long du "corps" de chaque papillon, en créant la superposition des ailes ;
  - les deux triangles du papillon de gauche (Laura) sont égaux ainsi que les deux couples de triangles du papillon de droite (Paola).
- Comprendre que pour résoudre le problème, il faut comparer les aires des ailes des deux papillons.

  De nombreuses procédures peuvent être suivies, par exemple :
  - découpage (manuel ou figuré) et superposition de toutes les ailes du papillon de droite sur les ailes du papillon de gauche ; découpage et juxtaposition d'une couple d'ailes différentes du papillon de droite (fig.1) et d'une aile du papillon de gauche, ou de la couple d'ailes du papillon de gauche avec les deux couples du papillon de droit (fig.2-3) et reconnaître la congruence par superposition ;

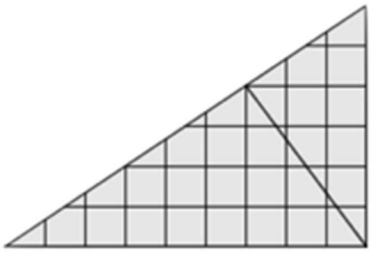


fig. 1

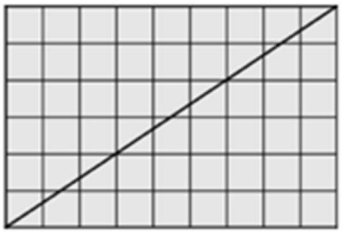


fig. 2

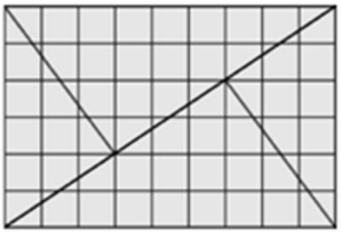


fig. 3

  - comptage des carreaux entiers puis les parties de carreaux du quadrillage (27 carreaux pour chacun des deux triangles du papillon de gauche ; 18 pour chacun des plus grands triangles et 9 pour chacun des plus petits triangles du papillon de droite).

  Le comptage un à un des carreaux avec compensation des carreaux non entiers est délicat et peut entraîner des erreurs.

- utilisation de la formule de l'aire du triangle, en choisissant, par facilité, la « base » et la « hauteur » qui suivent les lignes du quadrillage, compter le nombre de côtés de carreaux entiers présents sur les bases des triangles correspondant aux ailes, celui relatif aux hauteurs respectives pour la grande aile $(9 \times 6) / 2 = 27$; pour la « grande des petites » "$(9 \times 4) / 2 = 18$ et pour la « petite des petites » $(6 \times 3) / 2 = 9$ ou prendre des mesures avec la règle graduée et calculer les aires en appliquant la formule.
- Établir finalement que les ailes du papillon de gauche ont la même aire que celles du papillon de droite.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Laura et Paula utilisent la même quantité de carton) avec découpage des ailes et comparaison par superposition/ juxtaposition précise des pièces ou avec comptage des carreaux ou calculs détaillés des aires

3 Réponse correcte mais avec des superpositions / juxtapositions inexactes (chevauchement de pièces ou espaces vides entre les pièces) ou calculs avec approximation ou comptages non détaillés.

2 Réponse erronée avec des superpositions / juxtapositions inexactes, ou erreurs dans le comptage / calcul des aires, mais procédure bien comprise ou mesures effectuées avec une bonne approximation.

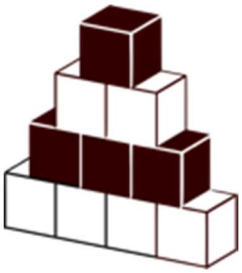
1 Réponse correcte sans montrer les procédures suivies ou réponse « On voit que ... »
ou début d'une recherche cohérente (par exemple : calcul de quelques aires ou identification du rectangle avec les triangles du papillon de gauche)

0 Incompréhension du problème

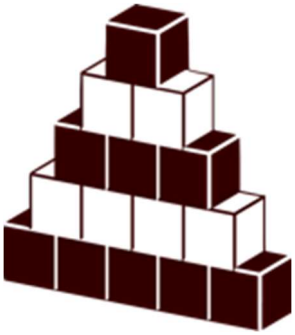
C. TOURS DE CUBES / WÜRFELTÜRME (Cat. 72, 82, 92)

Trois amis construisent des tours avec des cubes blancs et des cubes noirs.

Voici deux des tours construites par les trois amis.



Tour de Richard



Tour de Claire

Léa décide alors de construire une tour de vingt-cinq étages avec les mêmes caractéristiques : un étage blanc alterne avec un étage noir et le sommet est formé par un seul cube noir.

Quelle est la différence entre le nombre de cubes blancs et le nombre de cubes noirs utilisés par Léa pour construire sa tour ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans la suite des nombres naturels de 1 à 25, calculer la différence entre la somme des nombres pairs et celle des nombres impairs.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation en observant les figures :
  - il faut construire des "tours" avec les cubes pour que chaque étage ait un nombre de cubes inférieur à 1 par rapport au précédent ;
  - les étages de chaque tour doivent être alternés, l'un formé uniquement de cubes noirs et l'autre formé uniquement de cubes blancs ;
  - le sommet des tours est constitué d'un cube noir.
- Construire ou dessiner la tour de 25 étages ou son début pour réaliser que le nombre de cubes noirs sera donné par la somme des nombres impairs de 1 à 25, sur la base des modèles fourni :
  dans la tour de Richard, il y a 1 + 3 = 4 cubes noirs et 2 + 4 = 6 cubes blancs, avec une différence de 2 ;
  dans la tour de Claire, il y a 1 + 3 +5 =9 cubes noirs et 2 + 4 = 6 cubes blancs, avec une différence de 3.
- Effectuer les calculs
  cubes noirs : 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + ... + 25 = 169
  cubes blancs : 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + ... 24 = 156
  différence : 169 – 156 = 13.

Ou

- Sans calculer les sommes décrites ci-dessus, calculer les différences une à une (25 – 24) + (23 – 22) + (21 – 20) + ... (il y a un cube supplémentaire dans les deux premiers étages, puis à nouveau un autre cube pour les deux suivants, ... donc il y a 12 cubes noirs supplémentaires pour les 12 premières paires d'étages auxquels il faut ajouter celui du haut de la tour : 12 + 1 = 13.

Ou

- Après avoir construit les tours de Richard (B – N = 2) et de Claire (N – B = 3), considérer la tour suivante et vérifier que la différence est toujours de 3. Considérer ensuite les deux suivantes et vérifiez que la différence entre le nombre des cubes noirs et celle des cubes blancs donne 4. Imaginer alors que les différences sont les mêmes pour les paires suivantes. Ensuite, procéder au décompte ou trouver une stratégie pour calculer sans écrire toutes les tentatives, par exemple 24/2 + 1, jusqu'à déterminer que la différence pour la tour à 25 étages est de 13 cubes.

Attribution des points

4 Bonne réponse (13) avec une explication claire et complète (construction des tours, représentation graphique et / ou tableau, détail de tous les calculs effectués, remarques claires ...) qui fait comprendre la procédure adoptée

3 Bonne réponse avec une explication incomplète ou peu claire
ou raisonnement complet et clair mais pas de réponse explicite

2 Bonne réponse sans aucune explication
ou réponse erronée ou manquante mais avec une compréhension claire de la relation couleur noir / impair et blanc / pair et une recherche cohérente avec une seule erreur de calcul, de représentation ou de construction
ou réponse correcte mais avec des couleurs inversées, c'est-à-dire le dessus blanc, les étages blancs / impairs et les étages pairs / noirs.

1 Début de recherche cohérente (compréhension de la relation couleur noire à la base / nombre impair d'étages et couleur blanche à la base / nombre pair d'étages attestant de la compréhension du problème)

0 Mauvaise compréhension du problème
ou erreur due à une fausse proportionnalité (réponse 15)

D. QUEL PERSONNAGE CHOISISSEZ-VOUS ? / LIEBLINGSFIGUR (Cat. 72, 82, 92)

Lors d'une enquête, les 26 élèves choisissent chacun un seul personnage parmi :

Mickey, Donald, Dingo et Oncle Picsou.

21 enfants n'ont pas choisi Dingo.

22 enfants n'ont pas choisi Oncle Picsou.

Les enfants qui ont choisi Donald sont 3 de plus que ceux qui ont choisi Mickey.

Combien d'enfants ont choisi Mickey, combien ont choisi Donald, combien ont choisi Dingo et combien ont choisi Oncle Picsou ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Réaliser la partition d'un ensemble dont le nombre d'éléments (26) est connu en quatre sous-ensembles, dont deux sont définis par une négation et les deux autres par une comparaison (dans l'un il y a 3 éléments de plus que l'autre)

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation pour comprendre que les 26 élèves doivent être répartis en quatre ensembles (disjoints) selon leur choix : Mickey, Donald, Dingo (Goofy) et Oncle Picsou (Dagobert)
- La tâche consiste alors à déterminer les nombres de ces ensembles :
  - 21 n'ont pas choisi Dingo (Goofy) signifie que 21 sur 26 "n'appartiennent" pas à l'ensemble de Dingo (Goofy) mais aussi que 5 y appartiennent ; de même, 22 n'ont pas choisi Oncle Picsou (Dagobert), signifie que 22 sur 26 "n'appartiennent" pas à l'ensemble d'Oncle Picsou (Dagobert) et que 4 y appartiennent.
  - Il reste 17 élèves (26 – 5 – 4) qui « appartiennent aux deux autres ensembles : ceux qui ont choisi Donald sont 3 de plus que ceux qui ont choisi Mickey.
  - Pour trouver les deux nombres dont la somme est 17 et la différence est 3, on peut procéder par essais … 5 + (5 + 3) ; 6 + (6 + 3) ; jusqu'à 7 + (7 + 3) = 17 (ou …12 + (12 – 3) … jusqu'à 10 + (10 – 3) = 17) ; c'est-à-dire 7 et 10 ou 10 et 7.

    Ou chercher toutes les paires de nombres dont la somme est 17 : (1 ; 16), (2 ; 15, (3 ; 14, ...) et identifier celle dont les éléments diffèrent de 3 : (7 ; 10)

    Ou raisonner sur les nombres (en s'aidant éventuellement d'une représentation graphique : si de 17 on retire le 3 de différence on obtient 14 qui est le double du petit, c'est-à-dire 7, le grand étant 10.
- La réponse est donc Mickey 7, Donald 10, Dingo (Goofy) 5, Oncle Picsou (Dagobert) 4.

Attribution des points

4 Bonne réponse « Mickey 7, Donald 10, Dingo (Goofy) 5, Oncle Picsou (Dagobert) 4 » avec une description claire et complète de la procédure (avec toutes les schématisations graphiques ou les calculs nécessaires)

3 Réponse correcte avec description partielle ou peu claire de la procédure suivie (absence de certaines étapes ou avec seulement une vérification)

2 Bonne réponse sans explication

ou réponses correctes pour Dingo (Goofy) et Oncle Picsou (Dagobert) et début d'une recherche correcte pour les autres, sans parvenir à la conclusion, mais la compréhension de la relation entre Donald et Mickey est comprise.

1 Bonnes réponses uniquement pour Dingo (Goofy) et Oncle Piscou (Dagobert)

ou début d'un raisonnement correct, par exemple une représentation ou un calcul montrant une compréhension de la situation sans être en mesure de trouver une stratégie de solution appropriée

0 Incompréhension du problème

E. CERISES / KIRSCHEN (Cat. 72, 82, 92)

Fabien, Livia et Albert comptent les cerises que chacun a récoltées et découvrent que :

- Livia a 20 cerises de plus que Fabien.
- Il manque 5 cerises à Albert pour atteindre le double de celles récoltées par Fabien.
- Il y a en tout 103 cerises.

Combien de cerises chacun a-t-il récoltées ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres entiers, sachant que le deuxième nombre vaut 20 de plus que le premier, qu'il manque 5 au troisième pour arriver au double du premier et que la somme de ces trois nombres est 103. B = A + 20 ; C = 2A – 5 ; A + B + C = 103

Analyse de la tâche

- Quitter le contexte des cerises et percevoir les trois nombres encore inconnus (F, L et A) et leurs trois relations : L : 20 de plus que F ; A : 5 de moins que le double de F ; la somme des trois nombres est 103.
- La procédure par essais organisés progressivement convient parfaitement pour des élèves qui n'ont pas encore de connaissances algébriques, par exemple, en partant d'une valeur pour F on calcule les deux autres au moyen des deux premières relations ci-dessus :

  si F = 10, L = 30 (10 + 20), A = 15 (2x10 – 5) et au total 10 + 30 + 15 = 55, ce qui est insuffisant,

  si F = 20, L = 40, A = 35, au total 95, on s'approche,

  pour arriver à : F = 22, L = 42, A = 39 ; 22 + 42 + 39 = 103.

  Cette procédure peut être plus ou moins développée, de trois essais comme dans l'exemple à tous les essais envisageables (liste ou tableau), avec l'idée naissante de variable et de fonction qui pourra faire partie des exploitations didactiques futures.
- Une procédure plus générale peut être favorisée par la manière dont l'énoncé exprime les relations, où les nombres de L et de A sont donnée en référence à celui de F. En langage de l'élève (forme rhétorique) on peut considérer que le nombre de F, additionné au nombre de F plus 20 (nombre de L) puis au double du nombre de F moins 5 (nombre de A) représente quatre fois le nombre de F plus 15 (20 – 5) et que cette somme est égale à 103. A ce moment on peut déduire de la différence entre 15 et 103 : 88, que quatre fois le nombre de F est 88 et que le nombre de F est 22.

  Ce type de procédure peut être accompagné de symboles représentant le nombre de F (un carré, un segment, un « F » …) pour « visualiser » la grandeur inconnue, répétée quatre fois, et les deux nombres 15 et 103. Le modèle des deux plateaux d'une balance peut aussi être utile.
- La procédure algébrique ne fait que traduire la formulation précédente, en une équation du genre : F + F + 20 + (2F − 5) = 103.

Parmi les obstacles, on peut relever la difficulté à choisir un des trois nombres pour commencer les essais.

Il peut y avoir des réponses erronées dues à la prise en compte de deux seulement des trois relations. Par exemple avec la première et la troisième, si le choix du nombre de F est 10, le nombre de L est 30, la somme des deux est 40 et, sans tenir compte de la deuxième relation A serait 103 – 40 = 65.

Une autre erreur possible est de considérer que : « Comme il manque 5 au troisième pour arriver au double du premier alors C – 5 = 2 A ».

Attribution de points

4 Réponse correcte (Fabien 22 ; Livia 42, Albert 39) avec une explication claire et complète (les essais à rejeter et l'essai retenu correct comme vérification clairement identifié ou procédure plus générale comme dans l'analyse précédente ou encore autre explication convaincante)

3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes (par exemple les calculs et essais sans explications)

ou réponse 22 - 42 - 39 avec une explication claire sans préciser les noms F, L et A

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse incorrecte en raison d'une erreur de calcul mais avec procédure correcte

1 Début de recherche correct (par exemple : les données concernant les relations ont été comprises et représentées correctement ; la procédure par essais a été mise en œuvre sans parvenir à la bonne réponse)

ou une réponse cohérente mais ne tenant compte que de deux conditions, (du genre de celle de l'exemple)

0 Incompréhension du problème

F. GABRIELLE LA PETITE SORCIÈRE / DIE HEXE GABRIELLE (Cat. 72, 82, 92)

Gabrielle, la petite sorcière, prépare une potion magique pour remettre en forme ses elfes. Selon son livre de magie, il faut mélanger exactement 800 g de poudre de champignons bleus à 1000 g de lait de licorne.

Distraite par son bâton magique, Gabrielle réalise qu'elle a inversé les deux quantités : elle a dissous 1000 g de poudre de champignons bleus dans 800 g de lait de licorne. Comme la poudre de champignons bleus est difficile à trouver au pays des elfes, Gabrielle décide de ne pas jeter sa préparation.

Quel ingrédient Gabrielle devra-t-elle ajouter et en quelle quantité pour obtenir une potion qui respecte la recette du livre de magie ?

Expliquez votre raisonnement.

Analyse a priori

Tâche mathématique

Travailler sur une situation de proportionnalité : modifier une recette à deux ingrédients en calculant la masse de ce qu'il faut ajouter pour rétablir la proportion correcte

Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour respecter la recette, la proportion de poudre et de lait dans la potion doit être la même que celle de la recette originale.
- Comprendre qu'après avoir inversé les quantités, on doit conserver la quantité de poudre de champignon bleu et ajouter du lait de licorne.
- Pour trouver la quantité de lait à ajouter il faut partir de la recette « 800 g de poudre du champignon bleu pour 1 000 g de lait de licorne » et chercher le mélange final contenant « une quantité encore inconnue de lait et 1 000 g de poudre » c'est-à-dire passer du couple : (800 ; 1 000) au couple (1 000 ; *x*). Les quatre quantités se correspondant deux à deux, on peut les disposer en ligne, en colonne, en tableau, …
- Il faut alors tenir compte du fait que, dans une situation de « recette », c'est le rapport 1 000/800 = 5/4 = 1,25 qui est conservé et non la différence (1 000 – 800 = 200) qui conduirait à l'erreur 1 000 + 200 = 1 200. La quantité totale de lait doit donc être 1,25 fois celle de la poudre : 1,25 × 1 000 g= 1 250 g.
- Déduire alors les 800 g de lait déjà contenus dans le mélange et trouver le lait à ajouter : 1 250 − 800 = 450 (en g)

Remarque : 1,25 est le coefficient de proportionnalité du tableau qui suit.

Ou

- Décomposer le passage en plusieurs étapes, avec éventuellement le passage à l'unité, selon les propriétés de la proportionnalité qui conservent le rapport :

Masse de poudre en g	Masse de lait en g
800	1 000
400	500
100	125
1	**1,25 = 5/4**
…	…
1 000	1 250

Ou

Raisonner sur la quantité totale d'ingrédients (1 000 + 800 = 1 800 g) et travailler sur le rapport 800/1 800 = 4/9 pour trouver la quantité totale (1 000/x = 4/9 c'est-à-dire x = 2 250) en utilisant un tableau ou un coefficient de proportionnalité. Après avoir calculé le total, soustraire la quantité de poudre de champignons, c'est-à-dire 2 250 – 1 000 = 1 250, et finalement soustraire la quantité de lait déjà utilisée 1 250 − 800 = 450 g.

Attribution des points

4 Réponse correcte (ajouter 450 g de lait à la potion) avec explications claires et complètes (tous les calculs explicités de manière qu'il soit bien clair que le rapport entre les grandeurs est constant)

3 Réponse correcte avec explications peu claires (calculs incomplets ou inexpliqués)

ou réponse 1 250 de lait = 1,25 × 1 000 g, qui ne tient pas compte du fait que dans la mauvaise préparation il y a déjà 800 g de lait, avec une explication claire et complète : prenant en compte qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité

2 Réponse correcte sans explication

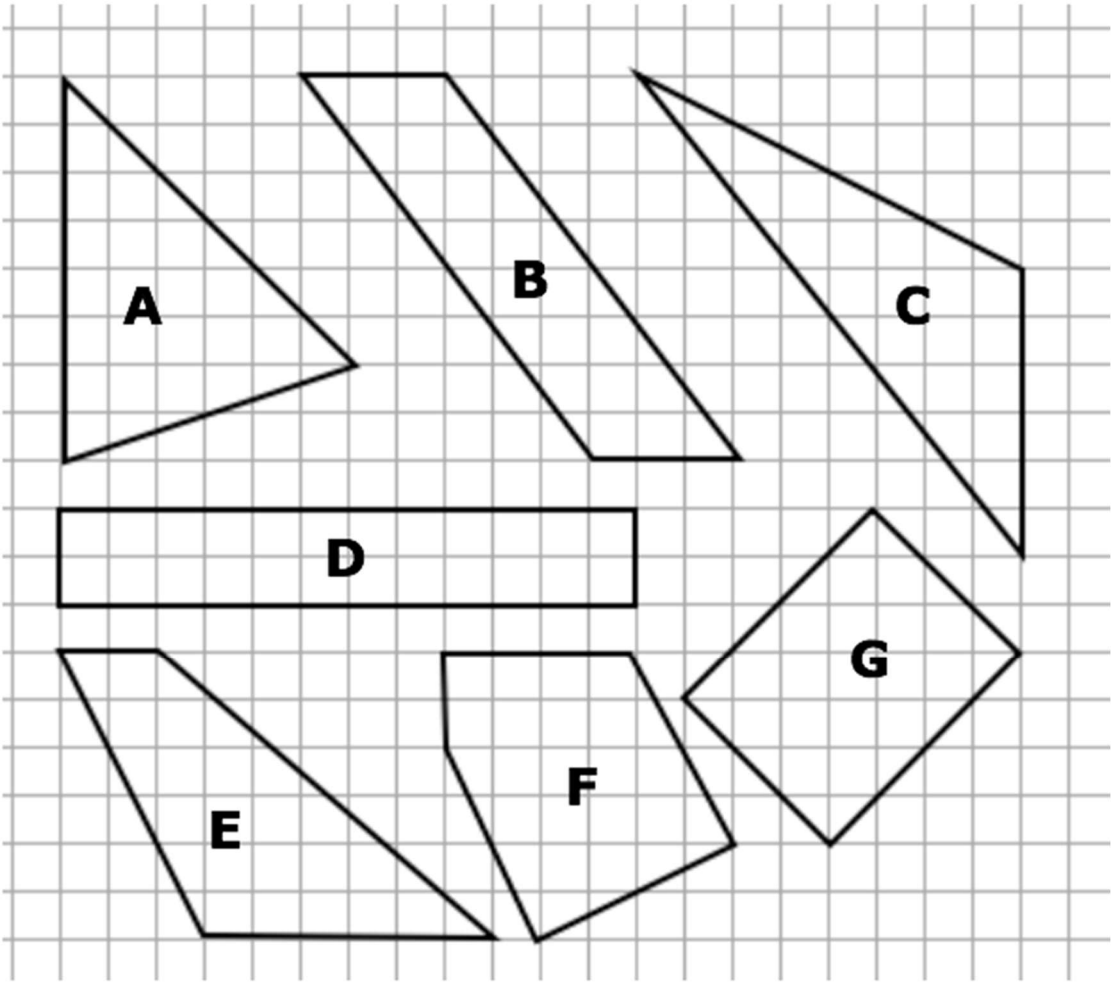
ou réponse 1 250 g de lait avec une explication incomplète

1 Début de raisonnement correct, par exemple explication que des rapports entre des masses d'ingrédients doivent être égaux

0 Incompréhension du problème ou réponse 200 g de lait (c'est-à-dire 1 000 – 800 = 200) due à une confusion entre conservation de la différence et conservation du rapport

G. LES SEPT POLYGONES / DIE SIEBEN VIELECKE (Cat. 72, 82, 92)

Voici sept polygones dont les sommets sont sur les intersections du quadrillage.



Identifiez les polygones de même aire.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les aires de 7 figures dessinées sur un quadrillage à maille carré dont tous les sommets sont sur des nœuds d'un quadrillage.

Analyse de la tâche

- Comprendre, à la lecture de la question et à l'observation des figures que pour comparer les aires, il s'agit de déterminer la mesure de chacune des trois aires, avec une unité commune.
- Constater qu'on ne peut pas appliquer de formules connues à tous les 7 polygones ; que la présence du quadrillage permet d'utiliser le carreau comme unité commune ; qu'il sera nécessaire de décomposer les figures en carrés entiers ou en parties de carrés ou en figures de base dont l'aire se détermine facilement.
- Les procédures de détermination de l'aire sont multiples, et différentes d'une figure à l'autre, en particulier :
- comptage une à une des unités entières, puis reconstitution d'unités par déplacements des parties non entières,
- décomposition de la figure en rectangles, triangles et parallélogrammes qui peuvent reconstituer un rectangle par déplacement
- perception du triangle rectangle comme la moitié d'un rectangle
- les triangles non rectangles sans angles obtus peuvent être décomposés en deux triangles rectangles,

- calcul de l'aire du rectangle circonscrit à la figure complète suivie de la soustraction des aires des rectangles et/ou des triangles complémentaires,
- application de la formule pour l'aire d'un triangle
- faire appel aux formules de l'aire lorsque les décompositions précédentes donnent des triangles dont une "base" et la "hauteur" correspondante suivent le quadrillage et ont des mesures entières de leurs longueurs/ou des rectangles dont les côtés suivent les lignes du quadrillage. -
- La stratégie par comptage est facilitée lorsque les côtés passent tous par des nœuds du quadrillage. C'est le cas par exemple pour l'aire des figures D et G (24 u) qui peut être déterminée par comptage de carreaux entiers ou de demi-carreaux. Dans les autres configurations la démarche nécessite des approximations qui peuvent conduire à des résultats erronés
- L'application des formules lorsqu'elles sont connues est efficace pour les figures usuelles dont on peut facilement déterminer les mesures. C'est le cas pour les figures A B C D E dont l'aire est aussi 24 u.
- L'analyse de la décomposition de la figure en figures simples est nécessaire lorsque les formules ne sont pas connues ou que les figures sont non « usuelles ». Les figures peuvent par exemple chacune être vues comme étant inscrites dans un rectangle aux côtés suivant les lignes du quadrillage. Leurs aires peuvent être alors calculées en enlevant à l'aire de ce rectangle, l'aire des triangles rectangles qui entourent chaque figure. L'aire en carreaux de le figure F est, par exemple, alors donnée par le calcul : $6 \times 6 - 3 \times (2 \times 4 / 2) = 24$; il est aussi possible de tracer des traits suivant les lignes du quadrillage pour obtenir une décomposition en sous-figures dont l'aire est facile à calculer. Par un segment « horizontal » on peut, par exemple, décomposer la figure F en un trapèze, un parallélogramme et un triangle rectangle et calculer son aire en carreaux en effectuant $(4 + 5) \times 2/2 + 2 \times 5 + 2 \times 5 / 2 = 24$

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (tous les polygones ont la même aire) avec des explications claires présentant la démarche suivie (qui peut être graphique) et les calculs effectués avec la réponse explicitée

3 Réponse correcte et complète (tous les polygones ont la même aire) avec des explications claires présentant la démarche suivie (qui peut être graphique) et les calculs effectués sans approximation pour 6 des sept polygones présentés

ou réponse erronée pour s'être trompé sur le calcul de l'aire d'un seul des sept polygones avec des explications claires présentant la démarche suivie (qui peut être graphique) et les calculs effectués sans approximation

ou réponse correcte et complète (tous les polygones ont la même aire) avec des explications claires présentant la démarche suivie (qui peut être graphique) et les calculs effectués sans la réponse explicitée

2 Réponse pour au moins 4 des sept polygones présentés avec la valeur de l'aire correcte avec des explications claires présentant la démarche suivie (qui peut être graphique) et les calculs justes effectués sans approximation.

ou réponse correcte avec la valeur de l'aire correcte sans autres explications

1 Début de recherche cohérente (par exemple détermination de l'aire de deux ou trois polygones ou seulement d'un polygone mais différent du rectangle)

0 Incompréhension du problème ou seulement détermination de l'aire du rectangle

H. LA TIRELIRE / DAS SPARSCHWEIN (Cat. 82, 92)

Dans la tirelire de Luc il y a 5,40 euros.

Luc sait qu'il n'y a pas mis de billets mais seulement des pièces de monnaie. Il ouvre sa tirelire, et il constate que parmi les huit valeurs de pièces possibles (de 1, 2, 5, 10, 20 ou 50 centimes et de 1 ou

2 euros) il n'a mis dans sa tirelire que des pièces de quatre valeurs différentes.

Luc note qu'il y a le même nombre de pièces pour chacune de ces quatre valeurs.

Combien peut-il y avoir de pièces dans la tirelire de Luc ?

Indiquez toutes les possibilités en précisant à chaque fois les valeurs respectives des pièces.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver quels sont les diviseurs de 540 , qui peuvent être la somme de quatre termes différents choisis parmi 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 et 200 dans un conteste die pièces de monnaie

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il y a beaucoup de manières de choisir quatre valeurs différentes parmi les huit à disposition pour obtenir 5,40.
- Comprendre que, lorsque l'on a choisi les quatre valeurs différentes ; par exemple 1 ; 0,5 ; 0,2 ; 0,05 on peut calculer la somme 1 + 0,5 + 0,2 + 0,05 = 1,75 € ou 175 centimes et que si on prend le même nombre de fois chacune de ces valeurs, par exemple 3, la somme des valeurs de l'exemple précédent serait 3 × 175 = 525. Comme 540 n'est pas un multiple de 175, ce choix des quatre valeurs est à rejeter.
- Le problème revient à trouver des couples de nombres **N** et **(a + b + c + d)** dont le produit est 540, couples constitués des diviseurs de 540. Il y en a 12 : (1 et 540 ; 2 et 270 ; 3 et 180, 4 et 135 ; 5 et 108 ; 6 et 90 ; 9 et 60 ; 10 et 54 ; 12 et 45 ; 15 et 36 ; 18 et 30 ; 20 et 27).
- Pour N = 1, la somme 540 ne peut pas être obtenu avec quatre des valeurs à disposition
- Pour N = 2, il faut que la somme soit 5,40 ÷ 2 = 2,70 qui ne peut pas être obtenue en quatre pièces différentes

  Pour N = 3, il faut que la somme soit 180 qui peut être obtenue comme 1 + 0,5 + 0,2 + 0,1. Il peut donc y avoir 3 pièces de chacune de ces quatre valeurs, soit 12 pièces en tout.

  Il y a en tout 5 essais qui aboutissent :

  N = 3 540 = 3 × 180 = 3 × (100 + 50 + 20 + 10) en 12 pièces

  N = 4 540 = 4 × 135 = 4 × (100 + 20 + 10 + 5) en 16 pièces

  N = 5 540 = 5 × 108 = 5 × (100 + 5 + 2 + 1) en 20 pièces

  N = 15 540 = 15 × 36 = 15 × (20+ 10 + 5 + 1) en 60 pièces

  N = 30 540 = 30 × 18 = 30 × (10 + 5 + 2 + 1) en 120 pièces

Ou

- Procéder par tentatives non organisées, sans reconnaître la distributivité du produit mais avec le risque d'oublier des solutions.

Erreurs possibles : ne pas respecter la condition de quatre valeurs différentes ou celle du même nombre de pièces.

Obstacle : sans reconnaître la distributivité, (produit) il devient très difficile de trouver toutes les solutions.

Le problème offre l'occasion d'aborder les propriétés des opérations de manière non mécanique et, avec la demande d'effectuer un contrôle rigoureux sur les 12 paires de diviseurs, permet de poursuivre un objectif important de l'enseignement des mathématiques.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète :

12 pièces avec à chaque fois 3 pièces de 1€ ; 50 Cts ; 20 Cts et 10Cts

ou 16 pièces avec à chaque fois 4 pièces de 1€ ; 20 Cts ; 10 Cts et 5 Cts

ou 20 pièces avec à chaque fois 5 pièces de 1€ ; 5 Cts ; 2 Cts et 1 Ct

ou 60 pièces avec à chaque fois 15 pièces de 20 Cts ; 10 Cts ; 5 Cts et 1 Ct

ou 120 pièces avec à chaque fois 30 pièces de 10 Cts ; 5 Cts ; 2 Cts et 1 Ct

avec une procédure claire qui montre les tentatives ou mentionnant au moins la recherche des “diviseurs”

3 Réponse correcte et complète (les cinq possibilités mentionnées ci-dessus avec détails) avec tentatives peu claires ou avec une explication incomplète de la procédure de recherche

ou réponse avec 4 possibilités correctes, avec détails, avec une procédure claire qui montre les tentatives ou mentionnant au moins la recherche des “diviseurs”

2 Réponse avec 4 possibilités correctes sans commentaires ni explications

ou réponse avec 2 ou 3 possibilités correctes, avec détails

1 Une seule possibilité correcte trouvée,

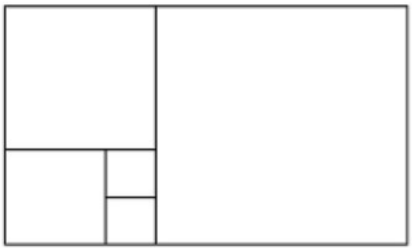
ou début de recherche avec des solutions incorrectes

0 Incompréhension du problème

I. LES CARRÉS D'ALEX ET DE FRANÇOIS / DIE QUADRATE VON FRANÇOIS UND ALEX (Cat. 92)

Alex et François considèrent la figure suivante représentant un rectangle formé de cinq carrés.

Alex affirme que s'il connaît le périmètre d'un tel rectangle, il peut calculer son aire.



Alex choisit un périmètre du rectangle de 130 cm.

Quelle est l'aire du rectangle dans ce cas ?

François prétend qu'il peut calculer le périmètre d'un tel rectangle à partir de son aire.

François choisit une aire du rectangle de 1440 cm^2 ? Quel est le périmètre du rectangle dans ce cas ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSI A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle et carré.
- Grandeurs et mesures : mesures de périmètres et aires.

Analyse de la tâche

- Observer que le rectangle est formé de 5 carrés : deux petits carrés dont les côtés peuvent être pris comme unité de longueur, un carré de côté double, un carré de côté triple et un grand carré de côté 5 unités.
- Remarquer que le rectangle a pour périmètre $2 \times (5 + 8) = 26$ (en unités) et qu'il contient $2 + 4 + 9 + 25 = 40$ carrés unité.
- Puisque le périmètre d'Alex vaut 130 cm, il a pris $130/26 = 5$ (en cm) pour côté d'un carré unité qui a donc une aire de 25 (en cm^2) et dans l'exemple d'Alex, le rectangle a une aire de $25 \times 40 = 1000$ (en cm^2).
- Puisque l'aire de François vaut 1440 (en cm^2), il a pris dans son exemple $1440/40 = 36$(en cm^2) pour aire d'un carré unité et 6 cm comme unité de longueur. Le périmètre du rectangle qu'il doit donner est donc $26 \times 6 = 156$ cm.

Attribution des points

4 Les deux réponses (1000 cm^2 et 156 cm) justifiées

3 Les deux réponses correctes sans explications ou explications confuses

2 Une réponse correcte et l'autre manquante ou erronée à cause d'une erreur de calcul

1 Début de raisonnement cohérent

0 Incompréhension du problème