

## 7. L'ANNIVERSAIRE DE LUC (Cat. 71)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver un nombre  $n$  dont la somme de sa moitié ( $n/2$ ) et de son double ( $2n$ ) est 60, dans un contexte d'âges.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre les données du problème : Luc a le double de l'âge de Sara et la moitié de l'âge de sa tante ; la somme de l'âge de Sara et de l'âge de la tante est égale à 60.
- Procéder par essais en faisant des hypothèses sur l'âge de Luc, et effectuer les ajustements successifs pour arriver à réaliser l'égalité :  $n \div 2 + 2n = 60$ , c'est-à-dire la somme des âges de Sara et de Florence. La recherche peut être facilitée en partant du fait qu'il s'agit d'un double, l'âge de Luc doit donc être pair, et il doit être inférieur à 30 ( $= 60 \div 2$ ), puisque 60 contient le double de l'âge de Luc plus sa moitié. Dans la recherche s'arrêter au nombre 24 qui satisfait aux conditions,  $24 \div 2 + 24 \times 2 = 60$ .

Ou

- Prendre comme référence l'âge de Sara, et comprendre que son nombre d'années est contenu deux fois dans celui de Luc, et donc quatre fois dans celui de la tante Florence. Calculer donc l'âge de Sara,  $60 \div (1 + 4) = 12$ . Doubler l'âge de Sara pour trouver celui de Luc :  $12 \times 2 = 24$ . S'aider éventuellement d'une représentation graphique pour arriver à la solution.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (24 ans) avec une description claire du raisonnement (calculs, ou schéma, ou tests double + moitié = 60, ou...)
- 3 Réponse correcte mais avec une description peu claire ou comportant certains manques  
ou réponse erronée en raison d'erreurs de calculs mais avec une description claire des différentes étapes de la recherche  
ou réponse correcte sur les âges de Sara et /ou Florence avec des explications claires, mais sans indiquer l'âge de Luc
- 2 Réponse correcte sans explication ou seulement une vérification
- 1 Début de recherche correcte (essais n'aboutissant pas au résultat)  
ou réponse erronée en raison d'une confusion entre double et moitié
- 0 Incompréhension du problème

## 8. UN PEU DE FOOT (Cat. 71)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Complétez un tableau en recherchant trois nombres naturels dont la somme est 38 et dont la somme des produits du premier nombre par 3, du second nombre par 1, du troisième par 0 est égale aux nombres attendus (61 et 91). Pour 61, un des trois nombres est donné.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre le tableau et vérifier, pour l'équipe du Real Madrid, que la somme des matchs gagnés, nuls et perdus est de 38 et que le score 100 est obtenu en multipliant le nombre de matchs gagnés par 3 et en ajoutant au résultat le produit de 1 par le nombre de matchs nuls et 0 pour le nombre de matchs perdus :  $3 \times 32 + 1 \times 4 + 2 \times 0 = 100$ .
- Comprendre que le nombre de matchs perdus ne modifie pas le total des points, que les points obtenus lors des matchs nuls correspondent à leur nombre.
- Déduire que pour Valence,  $61 - 10 = 51$  est le nombre de points obtenus pour les 17 matchs gagnés ( $17 = 51 : 3$ ). Il y a 11 matchs perdus car  $38 - (17 + 10) = 11$ .
- Pour Barcelone, on peut procéder à partir du plus grand multiple de 3 inférieur à 91 en diminuant successivement de 1 le nombre de matchs :  
 $91 = 3 \times 30 + 1$  et  $30 + 1 + 7 = 38$  donc 30 victoires, 1 match nul et 7 défaites ou **30 / 1 / 7**  
 $91 = 3 \times 29 + 4$  et  $29 + 4 + 5 = 38$  donc **29 / 4 / 5**  
 et ainsi de suite pour les deux cas suivants **28 / 7 / 3** et **27 / 10 / 1**, alors qu'avec 26 matchs la somme des victoires serait supérieure à celle des matchs joués :  
 $91 - 3 \times 26 + 13$  et  $26 + 13 = 39$  ;  $39 > 38$ .

Ou

- Observer qu'il s'agit de trouver trois nombres dont la somme est 38 tels que le triple du premier plus le deuxième font 91. Puisque 91 n'est pas un multiple de 3 mais que 90 l'est, il y a au moins un match nul. S'il y en a qu'un alors 30 matchs sont gagnés ( $30 = 90 : 3$ ) et il y a donc 7 matchs perdus  $7 = 38 - (30 + 1)$ .
  - o Procéder de la même manière en augmentant le nombre de matchs nuls. Il ne peut y avoir 2 ou 3 matchs nuls parce que ni 89 ni 88 ne sont multiples de 3. Par contre, il peut y avoir 4 matchs nuls et 29 matchs gagnés ( $29 = 87 : 3$ ) et 5 matchs perdus :  $5 = 38 - (29 + 4)$ . En continuant ainsi on obtient les autres possibilités et on exclut les nombres de victoires inférieurs à 27.
  - o Réaliser qu'en réduisant le nombre de victoires de un, pour obtenir le même score, il faut augmenter le nombre de nuls de 3, dans la mesure où la condition relative au nombre total de matchs le permet.

Ou

- faire une hypothèse sur le nombre de matchs nuls (ou gagnés), déterminer à partir du nombre de points obtenus durant la saison, le nombre de matchs gagnés (ou nuls) et enfin à partir du nombre de matchs joués, le nombre de matchs perdus. Certaines hypothèses conduisent à des impossibilités.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (11 matchs perdus pour Valence et 4 solutions pour Barcelone : 30/1/7, 29/4/5, 28/7/3 et 27/10/1) avec une explication claire de l'exhaustivité des 4 solutions (essais, raisonnements sur les multiples, déductions, avec détail des calculs...)
- 3 Réponse correcte avec une explication peu claire ou incomplète (il manque des essais ou l'explication qu'il n'y a que 4 possibilités pour Barcelone, ou les détails des calculs ne sont pas donnés)  
 ou réponse correcte pour Valence et seulement 2 ou 3 possibilités pour Barcelone avec explications claires  
 ou réponse correcte et bien justifiée pour Barcelone mais pas de réponse pour Valence
- 2 Réponse correcte pour Valence avec le détail des calculs et une seule possibilité pour Barcelone  
 ou les quatre possibilités pour Barcelone dans lesquelles le nombre de victoires est correct mais avec une ou deux erreurs de calcul pour les défaites
- 1 Réponse correcte seulement pour Valence avec détail des calculs et pas de réponse pour Barcelone  
 ou seulement la réponse correcte pour Valence sans explication et des essais montrant la compréhension de la situation pour Barcelone (par exemple, les nombres respectent la condition selon laquelle la somme des points égale 91 mais le nombre de matchs joués est différent de 38)
- 0 Incompréhension du problème

## 9. LES FRIANDISES DE GRAND-MÈRE PAULETTE (Cat. 71)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver trois nombres, étant donné les relations entre eux : le second est égal au double du premier plus 5, le troisième est égal au second plus 9, et aussi égal à la somme du premier et du second.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que les trois enfants mangent des quantités différentes de friandises et qu'il existe des relations entre ces quantités : Luc mange le double de friandises de Paul plus 5 autres, Bernard en consomme 10 de plus que Luc.
- Comprendre que le nombre de friandises consommées par Bernard est aussi égal au total des friandises consommées par Paul et Luc ensemble et que les trois enfants mangent toutes les friandises préparées par grand-mère.
- Procéder par essais, en faisant une hypothèse sur le nombre de friandises consommées par Paul et par conséquent le nombre de friandises consommées par Luc et Bernard, puis vérifier si le troisième nombre est égal à la somme des deux premiers. Par exemple, si vous posez que Paul a mangé 3 friandises, Luc en a pris le double plus 5 en plus, soit 11 et Bernard 9 de plus que Luc, soit 20. Mais 20 n'est pas égal à la somme de 3 et 11, nombres de friandises mangées par Paul et Luc, alors 3 n'est pas bon.
- Procéder ainsi, en s'aidant éventuellement d'un tableur pour établir que si Paul mange 9 friandises alors Luc en a pris 23 ( $9 \times 2 + 5$ ) et Bernard 32 ( $9 + 23$ ).
- Calculer la somme  $9 + 23 + 32 = 64$  pour trouver que grand-mère a préparé 64 friandises.

Ou

- Comprendre d'après les relations données dans l'énoncé que Luc mange deux fois plus de friandises que Paul plus cinq autres, que Bernard en mange 9 de plus que Luc et donc le double de ceux de Paul plus 14.
- Dédire de la troisième information que ce nombre est aussi égal à la somme du nombre des friandises mangées par Paul et Luc, soit trois fois ceux de Paul plus 5. La situation peut également être représentée par des dessins. En déduire que Paul a mangé 9 friandises et déterminer les autres quantités et le nombre total de friandises préparées par Grand-mère.

Ou

- Considérer que Bernard a mangé 9 friandises de plus que Luc, c'est-à-dire le nombre de friandises mangées par Paul. Décrire ce raisonnement avec des mots ou avec une représentation graphique ou en utilisant le symbolisme algébrique suivant : soient P, L et B les nombres de friandises mangées respectivement par Paul, Luc et Bernard, et écrire  $L = 2P + 5$ ,  $B = L + 9$ , mais aussi  $B = P + L$ . Par un raisonnement ou par substitution, déduire que  $L + 9 = P + L$  donc  $P = 9$ . Alors Luc a mangé  $23 (2P + 5)$  friandises et Bernard 32 et la grand-mère a préparé 64 friandises.

Ou

- Noter  $x$  le nombre de friandises consommées par Paul, puis écrire et résoudre l'équation :  $2x + 14 = 3x + 5$ .

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (64 friandises) avec une explication claire et complète de la procédure (explicitation des essais ou représentation graphique, ou procédure algébrique ou description verbale conduisant à la conclusion que  $P = 9$ )
- 3 Réponse correcte avec explication partielle ou imprécise (par exemple un seul essai ou une formalisation incomplète, ou une description de la procédure arithmétique peu claire)  
ou seulement le nombre de friandises consommées par Paul, mais avec une explication claire et complète
- 2 Réponse correcte avec seulement une vérification
- 1 Début de raisonnement correct ou représentation correcte de la situation
- 0 Incompréhension du problème

## 10. PENDENTIFS EN OR (Cat. 71)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Comparer l'aire de trois figures non polygonales et concaves obtenues en ajoutant et en supprimant des demi-disques de rectangles

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que la quantité d'or dépend de l'aire du pendentif.
- Constater qu'il s'agit de figures non polygonales.
- Se rendre compte qu'il est nécessaire de comparer les aires après avoir considéré un pendentif à la fois.
- Stratégies possibles :
- Faire le choix du carreau (c) comme unité d'aire.
- Décomposer chaque figure, « découper » et recoller les morceaux et se rendre compte que le pendentif d'Anna a une aire égale à celle d'un rectangle de  $6 \times 4 = 24$  c plus celle d'un demi-disque, le pendentif de Béatrice a une aire égale à celle d'un rectangle de  $8 \times 4 = 32$  c et le pendentif de Camille a une aire égale à celle d'un rectangle  $4 \times 2 = 8$  plus celle d'un carré  $4 \times 4 = 16$  donc de 24 carrés, plus celle de la partie dépassant du demi-disque inscrit dans un rectangle  $4 \times 2$ . Il est immédiatement évident que le pendentif de Béatrice est celui qui a la plus grande aire, il reste alors à déterminer de manière approximative celui qui a une plus petite aire entre le pendentif d'Anna et celui de Camille. L'aire du demi-disque est plus grande que l'aire de la partie excédentaire, donc le pendentif de Camille est celui qui a la plus petite aire.

Ou

- Procéder au comptage des carreaux contenus dans chaque figure, pour déterminer l'aire de manière approximative :  $30 \text{ c} < \text{le pendentif d'Anna} < 31 \text{ c}$ , le pendentif de Béatrice est de 32 c,  $25 \text{ c} < \text{le pendentif de Camille} < 26 \text{ c}$ . Déduire que le pendentif pour lequel plus d'or a été utilisé est celui de Béatrice, et celui pour lequel moins d'or a été utilisé est celui de Camille.

Ou

- Procéder au calcul de l'aire approximative des figures individuelles, qui peuvent être reliées aux rectangles en prenant un carreau comme unité d'aire ( $6 \times 4 = 24$  c Anna,  $4 \times 8 = 32$  c Béatrice,  $4 \times 8 = 32$  c Camille), auxquels des demi-disques identiques ont été ajoutés et supprimés. L'aire approximative d'un demi-disque est  $6,28 = (3,14 \times 2^2) / 2$ .  
 Aire du pendentif d'Anna :  $24 - 6,28 + 6,28 + 6,28 = 30,28$  c  
 Aire du pendentif de Béatrice :  $32 - 6,28 - 6,28 + 6,28 + 6,28 = 32$  c  
 Aire du pendentif de Camille :  $32 - 6,28 - 6,28 + 6,28 = 25,72$  c  
 En déduire que le pendentif pour lequel plus d'or a été utilisé est celui de Béatrice, et celui pour lequel moins d'or a été utilisé est celui de Camille.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (le pendentif de Béatrice est celui pour lequel plus d'or a été utilisé et celui de Camille est celui pour lequel moins d'or a été utilisé ou formulation équivalente) avec une description claire de la procédure effectuée (décomposition, comptage, comparaison des figures ou calculs approchés d'aires)
- 3 Réponse correcte avec une description peu claire de la procédure suivie  
ou réponse erronée en raison d'une seule erreur de calcul ou de comptage avec une description claire de la procédure suivie  
ou calcul de l'aire de seulement deux pendentifs
- 2 Seule la figure de plus grande aire est identifiée, avec une explication complète, avec présence au moins de tentatives pour déterminer l'aire des deux autres surfaces  
ou calcul de l'aire d'un seul pendentif
- 1 Réponse correcte sans explication  
ou début du raisonnement correct : il est clair que la grandeur en jeu est l'aire
- 0 Incompréhension du problème (par exemple, le périmètre de la zone est pris en compte à la place de l'aire)

## 11. LA BERGERIE DU BERGER ARTHUR (Cat. 71, 81)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer toutes les manières possibles de diviser, avec deux sortes de segments de longueurs données disposés parallèlement aux côtés, un rectangle en deux parties, dont l'un a une aire double de l'autre et chacune contenant un point donné.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que les barrières doivent être placées sur le quadrillage de la grille, parallèlement aux côtés du rectangle.
- Comprendre également, à partir de l'exemple, que toutes les barrières ne doivent pas nécessairement être utilisées à chaque fois.
- Calculer l'aire de l'enclos  $96 \text{ m}^2$  ( $12 \times 8$ ) et en déduire l'aire des deux parties : la plus petite  $32 \text{ m}^2$  ( $96 : 3$ ) et la plus grande  $64 \text{ m}^2$  ( $2 \times 32$ ). Il est aussi possible de raisonner en prenant pour unité le carreau.
- Identifier la possibilité symétrique à celle donnée à titre d'exemple (fig.1).
- Comprendre qu'en utilisant uniquement des barrières de 4 mètres, il existe six autres possibilités pour réaliser la division interne de l'enclos en respectant les contraintes : avec deux barrières comme en fig.2 et fig.3 ; avec trois barrières fig.4 et fig.5, avec quatre barrières comme en fig.6 et en fig.7

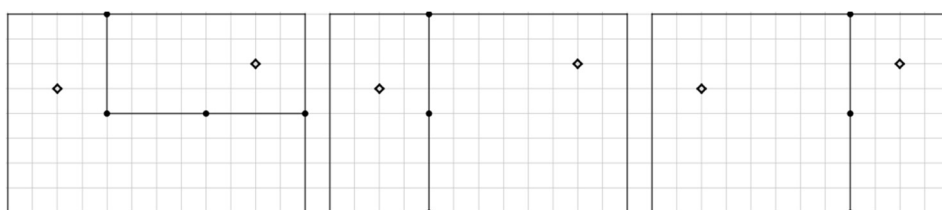


fig.1

fig.2

fig.3

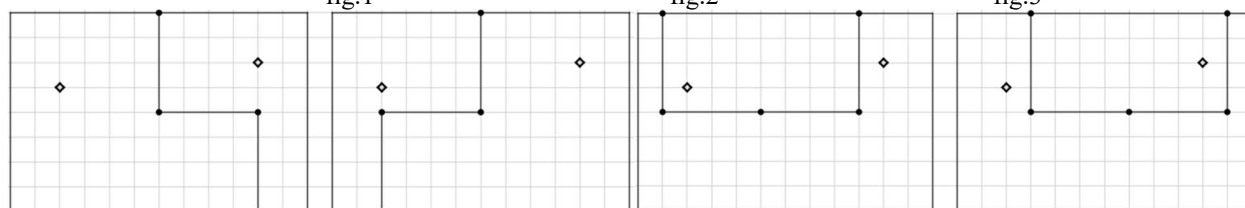


fig.4

fig.5

fig.6

fig.7

- De plus, en utilisant deux barrières de 4 mètres et celles de 6 mètres, on peut identifier deux autres possibilités (fig.8 et fig.9) :

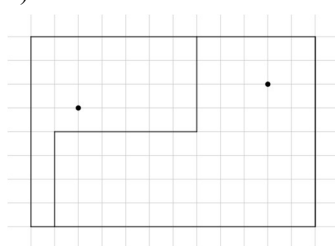


fig 8

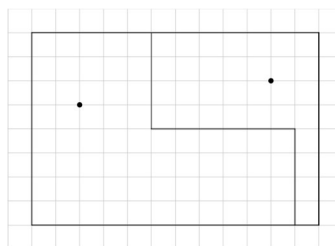


fig 9

#### Attribution des points

- 4 8 ou 9 figures correctes sans figures erronées.
- 3 7 figures correctes sans figures erronées  
ou 8 ou 9 figures correctes avec au plus 2 figures erronées
- 2 8 ou 9 figures correctes avec 3 figures erronées ou plus  
ou 7 figures correctes avec une ou plusieurs figures erronées  
ou 5 à 6 figures correctes avec ou sans figures erronées  
ou seulement 4 figures non symétriques identifiées, autres que celle donnée (par exemple fig. 2, 4, 6, 8)
- 1 Moins de 5 figures correctes, éventuellement avec quelques figures erronées
- 0 Incompréhension du problème

## 12. BISCUITS (Cat. 71, 81)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver deux nombres entiers naturels dont la somme vaut 27 et la somme des produits du premier nombre par 4 et du second par 7 vaut 174.

#### Analyse de la tâche

- Se représenter la situation : les 174 gâteaux répartis en 27 boîtes où dans chaque boîte les gâteaux sont tous du même type : les unes de 4 « pâtisseries », les autres de 7 « biscuits ».
- Percevoir les relations numériques en distinguant bien les nombres de boîtes et les nombres de gâteaux :  
le nombre de « pâtisseries » est égal à quatre fois le nombre de boîtes « pâtisseries » ( $4 \times P$ ),  
le nombre de « biscuits » est égal à sept fois le nombre de boîtes « biscuits » ( $7 \times B$ ),  
la somme des deux nombres de boîtes est égale à  $27 = P + B$ ,  
le nombre des gâteaux dans les deux types de boîtes est égal à  $174 = (4 \times P) + (7 \times B)$ .
- Pour trouver la solution sans recourir à l'algèbre (système de deux équations linéaires à deux inconnues) il faut commencer par un essai en choisissant les deux nombres de boîtes (par exemple 20 et 7), calculer les nombres de gâteaux correspondants ( $(4 \times 20) + (7 \times 7) = 129$ ) et constater que le nombre de gâteaux est différent de 174 (à moins d'être tombé directement sur la bonne répartition !) puis recommencer avec d'autres essais, au hasard.
  - Ou en « conduisant » les essais en fonction des résultats précédents (par exemple après 20 et 7 qui donne 129, se rendre compte qu'il faudra augmenter le nombre de boîtes qui ont le plus de gâteaux (B, avec 7 gâteaux par boîte) et diminuer le nombre de celles qui ont le moins de gâteaux (P, avec 4 gâteaux par boîte).  
Par exemple 15 et 12 donne  $(4 \times 15) + (7 \times 12) = 144$ , etc.  
On arrive ainsi à la solution 5 et 22 vérifiée par  $(4 \times 5) + (7 \times 22) = 174$ .
  - Ou en essayant systématiquement tous les couples dont la somme est 27 : (0 ; 27), (1 ; 26)... pour arriver à (5 ; 22).

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (5 boîtes de pâtisseries et 22 boîtes de biscuits) avec une description claire de la démarche (les essais sont indiqués avec les calculs permettant de distinguer les essais rejetés et la solution retenue)
- 3 Réponse correcte avec des explications incomplètes (seulement la vérification de la solution sans mentionner les essais ou des essais contenant des erreurs)
- 2 Réponse correcte sans explication ni vérification  
ou réponse erronée ne respectant pas la contrainte des 27 boîtes (par exemple : 26 boîtes de pâtisseries et 10 boîtes de biscuits  $(26 \times 4) + (10 \times 7) = 174$ )  
ou une seule erreur de calcul dans la résolution
- 1 Début de recherche correcte, par exemple quelques essais montrant que les informations ont été comprises, mais sans aboutir
- 0 Incompréhension du problème

**13. POMPES** (Cat.71, 81, 91, 10)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer le nombre de termes d'une suite arithmétique connaissant le premier et le dernier terme (10 et 73) et le fait que la raison est entière.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre la modalité d'exécution du programme de pompes : le premier jour 10 pompes, le deuxième  $10 + n$  (avec  $n$  nombre inconnu), le troisième  $10 + n + n$ , et ainsi de suite jusqu'au jour des 73 pompes.
- Se rendre compte que le nombre de jours durant lesquels Marc a exécuté son programme est égal au nombre  $p$  de fois qu'il a ajouté  $n$  pompes aux 10 pompes du premier jour, augmenté de 1 (le premier jour)
- Comprendre qu'il faut déterminer deux nombres naturels  $p$  et  $n$  dont le produit est  $p \times n = 63$  ( $73-10$ ) et que par conséquent ces nombres sont déterminés par la décomposition de 63 en produit de 2 facteurs.
- Compte tenu qu'il a commencé son programme depuis plus d'une semaine ( $p \geq 7$ ) et vu que 63, 21, 9, 7, 3 et 1 sont les seuls diviseurs de 63 les seuls couples  $(p ; n)$  possibles sont :  
 $n = 1$  et  $p = 63$ ,  $n = 3$  et  $p = 21$ ,  $n = 7$  et  $p = 9$ ,  $n = 9$  et  $p = 7$ .
- Conclure que Marc a exécuté son programme de pompes en 64 ( $= 63+1$ ) jours, ou en 22 ( $= 21+1$ ) jours ou en 10 ( $= 9+1$ ) jours ou en 8 ( $= 7+1$ ) jours, ajoutant respectivement 1, 3, 7 ou 9 pompes de plus chaque jour.

Ou

- Procéder par essais en partant de 10 pompes, pour atteindre 73 pompes en plus de 7 jours, en essayant successivement toutes les suites possibles (raison 1, 2, 3...9) en écartant éventuellement les raisons paires...

Ou

- Remarquer que pour augmenter de 63 pompes, on peut procéder avec des multiples de 3. Essayer avec 3, et constater qu'en 21 étapes on arrive à la solution 22 jours.
- Puis essayer 9 qui convient avec 7 étapes (donc 8 jours) et penser à la commutativité de la multiplication et essayer 7 qui convient avec 9 étapes (donc 10 jours).
- Remarquer que les autres produits obtenus par commutativité donnent des programmes qui sont inférieurs à une semaine.
- Par cette méthode on ne peut pas être certain de trouver toutes les solutions possibles à moins de vérifier que les essais pour un nombre de pompes égal à 2, 4, 5, 6 et 8 ne conviennent pas.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (64 ou 22 ou 10 ou 8 jours) avec explication claire de la procédure suivie
- 3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire  
ou réponse (63, 21, 9) avec rejet expliqué de la solution « 7 » qui ne ferait pas plus d'une semaine dans le cas où on a oublié d'ajouter le premier jour au total des jours  
ou trois solutions sont trouvées avec explications
- 2 Réponse correcte sans explication  
ou réponse erronée due à une erreur de calcul  
ou deux solutions sont trouvées parmi les 4 possibles  
ou réponse (63, 21, 9, 7) par oubli d'ajouter le premier jour au total des jours  
ou les 4 réponses correctes plus une réponse erronée correspondant à moins d'une semaine
- 1 Début de recherche cohérente ou une seule solution trouvée
- 0 Incompréhension du problème

## 14. DES DÉS ÉTRANGES (Cat. 81, 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

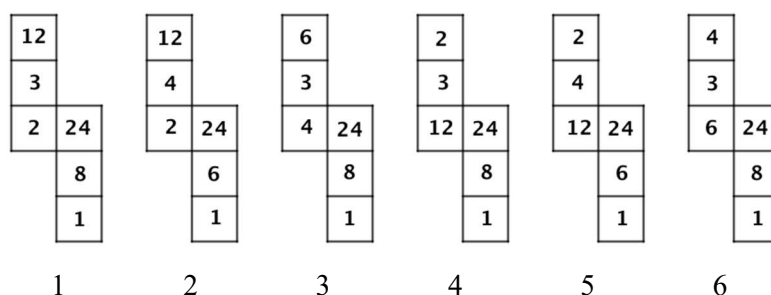
Trouver toutes les façons de placer des nombres sur les faces d'un cube de telle sorte que le produit des nombres écrits sur des faces opposées soit toujours égal à 24.

#### Analyse de la tâche

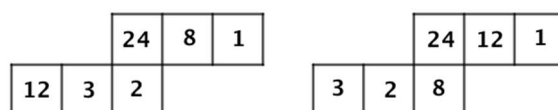
- Dessiner un dé ou le construire pour identifier les faces opposées sur lesquelles il faut écrire les nombres.
- Comprendre qu'il faut identifier parmi tous les diviseurs de 24 (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24) les paires de nombres qui multipliés entre eux donnent 24. Les paires qui répondent à cette condition sont : (1 ; 24), (2 ; 12), (3 ; 8) et (4 ; 6), mais puisque le couple (1 ; 24) apparaît toujours sur chaque dé, il faudra trouver 2 autres couples parmi les 3 couples restants pour compléter les 4 autres faces.
- Procéder par essais-erreurs pour placer les différentes paires de couples possibles (remplir un patron et vérifier s'il a déjà été trouvé).

Ou

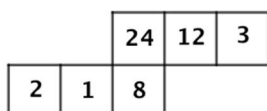
- Pour être sûr de n'oublier aucune solution, il vaut mieux fixer un couple et adapter les autres à tour de rôle ; par exemple, prendre le couple (2 ; 12) qui se combinera une fois avec (3 ; 8) et une autre fois avec (4 ; 6). De cette manière, 2 dés sont identifiés: ((1 ; 24) - (2 ; 12) - (3 ; 8)) et ((1 ; 24) - (2 ; 12) - (4 ; 6)).
- Procéder ensuite de la même manière en fixant le couple (3 ; 8) en le combinant avec le couple (4 ; 6) ; on obtient ainsi un autre dé : ((1 ; 24) - (4 ; 6) - (3 ; 8)) ; donc au total, Riccardo peut trouver 3 dés.
- Comprendre qu'en intervertissant deux faces opposées dans chacun des trois dés trouvés, on trouve trois nouveaux dés.
- Comprendre qu'en intervertissant d'autres faces opposées on retrouve un dé déjà répertorié parmi les 6 déjà trouvés (vérifiable par la manipulation).
- Remplir exactement 6 patrons ou entourer les 6 patrons corrects parmi les essais ou barrer tous les patrons ne répondant pas aux règles fixées par Riccardo pour ne garder que les 6 corrects suivants (d'autres organisations sont possibles) :



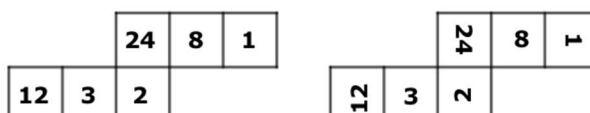
- Erreurs possibles :
  - o Liste erronée des décompositions en deux facteurs du nombre 24 ;
  - o Oubli des possibilités correspondant à l'inversion de seulement 2 faces opposées ;
  - o Ne pas percevoir des dés identiques et proposer des doublons, par exemple :



- o Mal positionner les faces opposées, par exemple :



- o Considérer les dés suivants comme différents (on ne pénalise pas mais on ne valorise pas non plus) :





A	
B	
C	24
D	
1	

- Possibilités équivalentes

1 <sup>ère</sup> possibilité :			
A	B	C	D
12	3	2	8
3	2	8	12
2	8	12	3
8	12	3	2

2 <sup>e</sup> possibilité :			
A	B	C	D
12	4	2	6
4	2	6	12
2	6	12	4
6	12	4	2

3 <sup>e</sup> possibilité :			
A	B	C	D
6	3	4	8
3	4	8	6
4	8	6	3
8	6	3	4

4 <sup>e</sup> possibilité :			
A	B	C	D
2	3	12	8
3	12	8	2
12	8	2	3
8	2	3	12

5 <sup>e</sup> possibilité :			
A	B	C	D
2	4	12	6
4	12	6	2
12	6	2	4
6	2	4	12

6 <sup>e</sup> possibilité :			
A	B	C	D
4	3	6	8
3	6	8	4
6	8	4	3
8	4	3	6

### Attribution des points

- 4 Exactly 6 drawings of different dice well identified (for example surrounded or not-barred eventually among other drawings) with explanations sufficiently detailed to understand the reasoning (list of possible couples, identification of opposite faces with material, table or combination tree, evocation of the inversion of 2 faces)
- 3 Exactly 6 drawings of different dice well identified (for example surrounded or eventually not-barred among other drawings), without explanations  
or at least 4 drawings of different dice well identified (for example surrounded or not-barred eventually among other drawings) with explanations sufficiently detailed
- 2 At least 4 drawings of different dice well identified (for example surrounded or not-barred eventually among other drawings) without explanations  
or the 3 drawings of dice involving respectively the three couples (24 ; 1), (12 ; 2), (8 ; 3) or (24 ; 1), (12 ; 2), (6 ; 4) or (24 ; 1), (8 ; 3), (6 ; 4) without considering the dice symmetrical by rapport to a plane (with explanations sufficiently detailed to understand the reasoning)
- 1 At least two drawings of different dice identified (for example surrounded or not-barred eventually among other drawings) with or without explanations
- 0 Incomprehension of the problem

## 15. JEU HEXAGONAL (Cat. 81, 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer parmi sept types de pièces, chacune composée de 4 hexagones réguliers, celles qui permettent de recouvrir un plateau de jeu hexagonal composé de 36 hexagones avec un trou central.

#### Analyse de la tâche

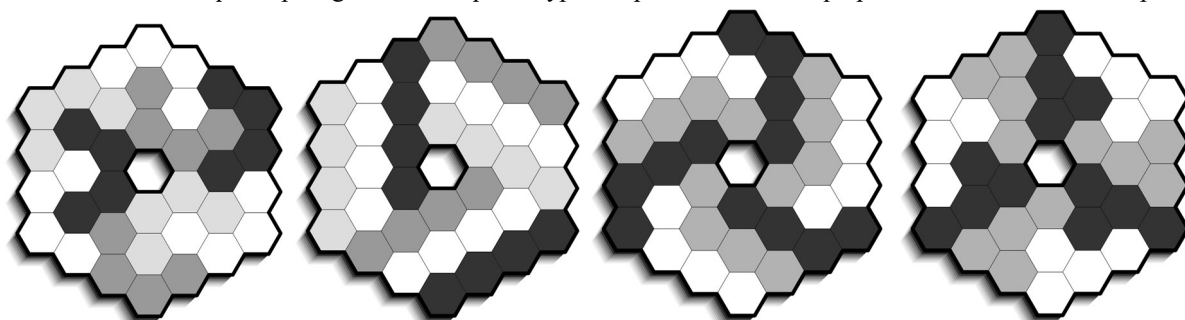
- Observer le plateau et prendre conscience qu'au centre se trouve un trou qui ne doit pas être couvert.
- Comprendre que pour un même recouvrement, il n'est possible de n'utiliser qu'un type de pièce et que les pièces peuvent être tournées ou retournées.
- Dénombrer les hexagones sur le plateau de jeu et constater que 9 pièces sont toujours nécessaires.
- En imaginant le contenu de la boîte, procéder par découpage de plusieurs pièces du même type, les placer directement sur la surface de jeu de façon à le recouvrir totalement.

Ou

- Essayer de colorier les pièces du même type sur le plateau, en cherchant à le recouvrir entièrement, en faisant attention à ce qui change si elles sont tournées ou retournées.

#### Attribution des points

- 4 Dessin correct des quatre pavages avec les quatre types de pièces différents qui permettent de recouvrir le plateau de jeu



- 3 Dessin correct de trois pavages avec trois types de pièce différents qui permettent de recouvrir le plateau de jeu
- 2 Dessin correct de deux pavages avec deux types de pièce différents qui permettent de recouvrir le plateau de jeu
- 1 Dessin correct d'un pavage avec un type de pièce qui permet de recouvrir le plateau de jeu  
Ou exclusion justifiée d'un type de pièce  
Ou compréhension des contraintes et propositions de plusieurs tentatives inabouties de pavage
- 0 Incompréhension du problème

## 16. ESCALIER DE CUBES (Cat. 81, 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

À partir d'un dessin en perspective d'un escalier construit avec 18 cubes de trois couleurs différentes (de 3 marches de trois cubes de largeur, dont on voit les trois rangs supérieurs et la « façade » de gauche) trouver la couleur des cubes non visibles, sachant que deux cubes ayant une face en commun sont toujours de couleurs différentes.

#### Analyse de la tâche

- Se rendre compte que l'escalier est constitué de 18 cubes dont 12 sont visibles et 6 non visibles sur le dessin : les deux du milieu et de droite sous la deuxième marche, les quatre du milieu et de droite, sur deux étages sous la troisième marche.
- Pour s'approprier la règle de construction (deux cubes avec une face commune sont de couleurs différentes), vérifier qu'elle est respectée sur les cubes visibles.
- Analysez un cube à la fois en comparant sa position avec les autres et déterminez la couleur qu'il peut avoir, remarquant que :
  - le cube du milieu sous la deuxième marche est sous le violet de la deuxième étape et à côté du gris en regardant l'échelle sur la vue de face, il est donc rouge (n.1),
  - son voisin à droite est sous le gris et à côté du rouge (n.1), il doit donc être violet (n.2),
  - le cube du milieu directement sous la troisième marche (au deuxième étage) se trouve sous un gris, à côté d'un gris et derrière un violet, il doit donc être rouge (n.3),
  - son voisin à droite est sous un rouge, à côté du rouge (n.3) et derrière un gris, il doit donc être violet (n.4)
  - le cube du milieu sous la deuxième marche est sous le violet de la deuxième marche et à côté du gris en « façade », il doit donc être rouge. (n° 1).
  - Le cube du milieu à la base de la troisième marche est sous un rouge (n° 3), à côté d'un rouge et derrière un rouge (n° 1) il peut donc être gris ou violet (n° 5).
  - a) S'il est gris, son voisin de droite sera à côté du n° 5 gris, derrière un violet (n° 2), et sous le violet (n° 4) il sera donc rouge (n° 6 rouge).
  - b) S'il est violet, son voisin de droite sera à côté du n° 5 violet, derrière un violet (n° 2), et sous le violet (n° 4) et il pourra donc être gris ou rouge.
- En définitive il y a trois combinaisons pour les deux cubes n° 5 et n° 6 : G R ; V G ; V R

Couche supérieure

V	G	R
---	---	---

Couche intermédiaire

G	<sub>3</sub> R	<sub>4</sub> V
R	V	G

Base

R	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>
G	<sub>1</sub> R	<sub>2</sub> V
V	G	R

Ou

- Chercher toutes les possibilités pour compléter les emplacements 1, 2, 5 et 6 puis éliminer celles qui ne conviennent pas en tenant compte de l'organisation des couches intermédiaire et supérieure.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (trois combinaisons pour les cubes 5 et 6 : G R ; V G ; V R), avec des explications claires (avec un dessin ou un texte)
- 3 Réponse correcte avec une explication peu claire  
ou réponse avec seulement deux possibilités sur les trois avec des explications claires
- 2 Une seule possibilité identifiée avec une représentation claire de la base  
ou réponse avec seulement deux possibilités sur les trois sans explication
- 1 Début de recherche qui montre la compréhension du texte
- 0 Incompréhension de la situation, ou aucun cube n'est identifié correctement

## 17. LE GOÛTER MIS EN JEU (Cat. 81, 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Dans la situation de tirage au sort de deux cartes sur quatre, chacune au dessin différent mais deux étant d'une couleur, deux étant d'une autre couleur, dénombrer les possibilités d'obtenir un tirage de deux cartes de la même couleur.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que parmi les 4 cartes, il y en a deux cartes rouges, et deux cartes vertes avec des dessins différents.
- Faire la liste de toutes les paires possibles en tirant deux cartes. Il y en a 6 :  
Tomate - R , Salade - V      **Tomate - R , Fraise - R**      Tomate - R , Courgette - V  
Salade - V , Fraise - R      **Salade - V , Courgette - V**      Fraise - R , Courgette - V.  
[Ou 12 couples possibles si on tient compte de l'ordre].
- Compter les tirages de la même couleur : **2** et ceux de couleurs différentes : 4  
[ou en tenant compte de l'ordre, **4** contre 8]
- Conclure que Marie a plus de chances que Raoul de gagner le goûter.

Ou

- Comprendre que si Raoul tire une première carte d'une certaine couleur, il reste 3 cartes dont deux sont de l'autre couleur et une de la même couleur. Il a donc une chance sur trois de tirer la deuxième carte qui lui donne le goûter. Marie a donc deux chances sur trois de gagner le goûter de Raoul.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (Marie a plus de chances que Raoul de gagner un goûter) avec des explications claires (liste complète des 6 ou 12 tirages possibles ou raisonnement sur les possibilités de choix des deux cartes pour Raoul)
- 3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires
- 2 Réponse erronée avec présence des 6 possibilités (ou 12)  
ou la liste de 4 ou 5 possibilités avec une conclusion cohérente (ou de 8 à 10 possibilités avec ordre)  
ou réponse correcte sans explications ni traces des possibilités, ou avec explications incohérentes
- 1 Proposition d'une liste de 3 à 5 possibilités, mais sans conclusion ou conclusion incohérente
- 0 Incompréhension du problème, ou réponse 2 chances sur 2

**18. LA CONFITURE DE MYRTILLES (Cat. 91, 10)****ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Comparer les prix unitaires de trois masses de confitures données et déterminer un pourcentage de réduction inférieur à 50 % à proposer pour que le prix de la plus petite devienne le plus avantageux.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que les trois pots ont des masses différentes et que leur prix dépend de la quantité de confiture qu'ils contiennent et du prix au kilogramme.
- Comprendre que la comparaison doit être faite sur un prix unitaire, par exemple par kg.
- Calculer les prix unitaires de chaque pot par exemple par kg :  $12,60/0,5 = 25,20$  € pour les pots de 500 g,  $10,80/0,3 = 36$  € pour les pots de 300 g et  $6,40/0,16 = 40$  € pour les pots de 160 g.
- Déterminer les pourcentages de remise qu'il est possible d'appliquer sur le prix des pots de 160 g pour obtenir un prix au kg inférieur à 25,20 €. Par exemple 20 € donnerait une réduction de 50 %. Elle doit être d'au moins  $(1 - 25,20/40) = 0,37 = 37\%$  ce qui ferait 25,20 € au kg.

Ou

- Procéder par essai sur le pourcentage de remise. Par exemple, avec 25% de réduction, vous obtenez un coût de 30 € par kg ; avec 30%, vous obtenez un coût de 28 € par kg ; et ainsi de suite jusqu'à une réduction de 37% correspondant à un coût de 25,20 € par kg.
- Dédire que le pourcentage de remise  $s$  doit vérifier  $37\% < s \leq 50\%$

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (remise  $s$  :  $37\% < s \leq 50\%$ ) avec explications claires et calculs détaillés
- 3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires  
ou réponse que la remise doit être comprise entre 37% et 50% sans spécifier que la remise doit être strictement supérieure à 37 % mais qu'elle peut être inférieure ou égale à 50 %
- 2 Réponse correcte sans explications
- 1 Début de raisonnement correct, par exemple le calcul des prix réduits par kg
- 0 Incompréhension du problème

## 19. LA TABLE DU GRAND-PÈRE (Cat. 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

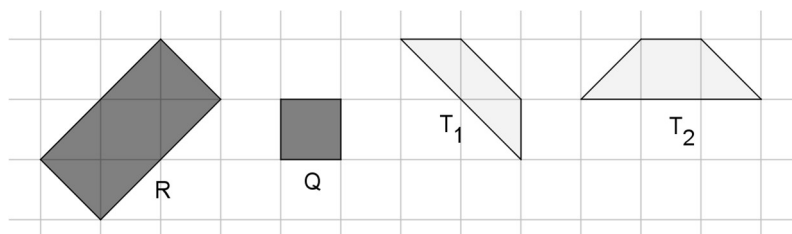
Étant donné un quadrillage de  $23 \times 23$  carrés unités, avec un début de pavage par des polygones clairs et foncés (des rectangles foncés d'aire 4 carrés unités, un carré unité foncé et des trapèzes clairs d'aires 2 et 1,5 carrés unités), comparer les aires des parties claires et foncées en imaginant de compléter le pavage.

#### Analyse de la tâche

- Observer la figure ; reconnaître qu'il s'agit d'un motif régulier qui se répète sur un quadrillage de  $23 \times 23$ , dont les côtés ont un motif différent.
- Compléter la figure puis compter 36 et 25 petits carrés et 60 polygones (octogones) pour placer les 60 rectangles d'aire 4 chacun. Trouver que l'aire foncée est de 301 carrés unités, donc supérieure à l'aire des pièces blanches qui mesure  $23 \times 23 - 301 = 228$  carrés unités.

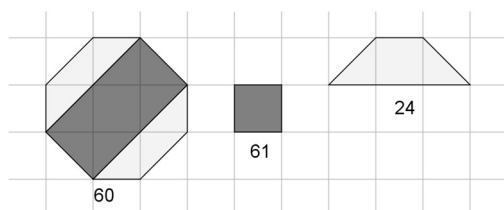
Ou

- Observer que la décoration est composée de polygones clairs et foncés, déterminer leurs aires en utilisant comme unité le carré du quadrillage et les compter de façon à trouver les aires totales claires et foncées. Une observation précise permet d'identifier des rectangles R (aire 4), des carrés Q (aire 1) foncés ; des trapèzes  $T_1$  (d'aire 1,5) et des trapèzes  $T_2$  (aire 2) clairs, ces derniers n'étant présents que sur les côtés.



Il y a différentes manières de déterminer les mesures des aires foncées et claires, regroupées par motifs (octogones, triangles, carrés, trapèzes). Par exemple :

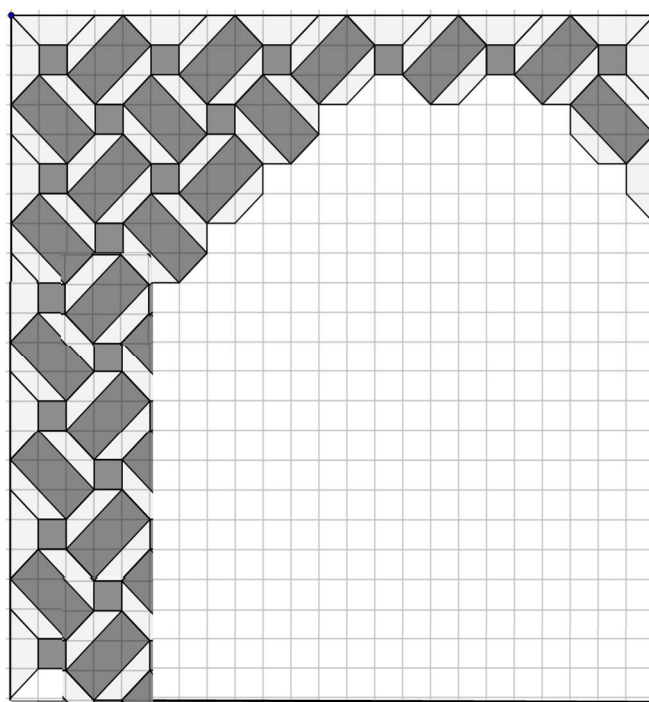
- Compter le nombre d'octogones qui contiennent un rectangle noir, le nombre de carrés noirs et le nombre de trapèzes  $T_2$  : il y en a 6 par côté de la table, soit 24 au total représentant 48 carrés unités.
- Pour dénombrer les octogones, on peut remarquer que la première ligne en contient 5 et la deuxième, une fois complétée, en aura 6. Il y a donc 11 octogones pour ce motif qui se répète 5 fois sur 21 carreaux en hauteur, et il reste une ligne de 5 octogones sur les trois derniers carreaux, ce qui fait 60 octogones. On compte aussi 61 carrés unités ( $11 \times 5 + 6 = 61$ ).



- Conclure que la partie foncée a une aire de 301 ( $4 \times 60 + 61$ ) et la partie claire a une aire de 228 ( $2 \times 1,5 \times 60 + 2 \times 24$ ).

Ou

- Remarquer que dans l'ensemble des octogones, l'aire foncée des rectangles équivalente à celle de 4 carreaux est supérieure à l'aire claire des deux trapèzes  $T_1$  équivalente à 3 carreaux unités, et donc l'ensemble de la partie foncée des octogones dépasse la partie claire de 60 unités, alors que l'aire claire des trapèzes  $T_2$  est seulement de 48 carrés unités. Conclure que la partie foncée a une aire supérieure à celle de la partie claire.



**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (la surface de bois foncé est la plus grande) avec un dessin complet et détermination de l'aire par comptage des 301 unités, ou la description claire et détaillée de la procédure suivie et des calculs effectués
- 3 Réponse correcte avec un dessin complet sans le comptage des 301 unités, ou avec des explications incomplètes ou peu claires (par exemple les calculs sont donnés mais il n'est pas dit comment le comptage a été effectué)
- 2 Dessin incomplet, mais montrant une procédure correcte  
ou raisonnement correct mais procédure contenant une erreur de calcul, avec une réponse correcte ou erronée
- 1 Début de raisonnement et de comptage correct ou réponse sans explication
- 0 Incompréhension du problème