

## 7. SCHALEN-WAGE - BALANCE À PLATEAUX (Cat. 71)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Compléter deux égalités dont un terme est déjà donné : 800, 450, en utilisant à chaque fois un ou plusieurs de quatre autres nombres donnés : 50, 100, 200, 500.

#### Analyse de la tâche

- Savoir qu'une balance à plateaux est en équilibre lorsque la masse présente sur un plateau est égale à celle présente sur l'autre plateau.
- Comprendre les données du problème : Anne dispose de 4 poids pour chaque balance, et pour chaque cas elle doit choisir parmi eux lesquels utiliser pour équilibrer la masse présente sur l'autre plateau ; chaque poids ne pouvant être utilisé pour chaque cas qu'une seule fois.
- Comprendre qu'on peut mettre la balance en équilibre soit en ajoutant des poids sur le plateau vide, soit en ajoutant des poids sur les deux plateaux.
- Procéder cas par cas, pour élaborer les égalités possibles.  
Une seule possibilité pour le 1er cas :  $800 = 500 + 200 + 100$   
Trois possibilités pour le 2ème cas :  $450 + 50 = 500$  ou  $450 + 100 = 500 + 50$  ou  $450 + 200 = 500 + 100 + 50$

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (les 4 solutions possibles données chacune par une égalité ou un dessin ou une description écrite) sans proposition erronée (par exemple erreurs en utilisant deux fois le même poids pour un cas, ou avec utilisation correcte des poids donnés mais avec erreur de calcul)
- 3 3 solutions possibles clairement décrites et sans solution erronée  
ou les 4 solutions correctes avec une seule autre solution, mais erronée
- 2 les 4 solutions correctes avec deux autres solutions erronées  
ou 3 solutions correctes, avec une autre solution erronée  
ou 2 solutions correctes, sans solutions erronées
- 1 Les 4 solutions correctes, mais avec plus de deux autres propositions erronées  
ou 2 ou 3 solutions correctes, avec deux solutions erronées  
ou présence seulement du nombre de solutions correctes, 4, sans détails des égalités ni dessin des équilibres,
- 0 Incompréhension du problème ou une ou deux solutions correctes, avec plus de deux solutions erronées

## 8. DER STURM - LA TEMPÊTE (I) (Cat. 71)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver le produit de 12 et d'un nombre  $x$  qui est aussi le produit de 16 et de  $x - 2$

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre total de parasols est le même que l'année précédente.
- Comprendre que le nombre de rangées, de l'ancienne disposition valait 2 de plus que celui de la nouvelle.
- Comprendre que le nombre de parasols à réorganiser est 24 ( $= 2 \times 12$ ).
- Comprendre que si on divise ce nombre par 4 on obtient le nombre de rangées restantes (6).
- Calculer le nombre de parasols par rangée dans la nouvelle disposition ( $12 + 4 = 16$ ).
- Calculer pour terminer le nombre total de parasols ( $6 \times 16 = 96$ ).

Ou, après avoir compris qu'il y a 24 parasols à remplacer à raison de 4 par rangée, dessiner un rang de  $12 + 4$  parasols et continuer jusqu'à ce que les 24 parasols soient tous remplacés (sur 6 rangs).

- Puis calculer le nombre total de parasols ( $6 \times 16 = 96$ )

Ou, comparer les deux situations pour visualiser les parasols avant et après la tempête

	avant	après	
1 <sup>e</sup> rang	12	$12 + 4 = 16$	
2 <sup>e</sup> rang	24	$24 + 8 = 32$	
3 <sup>e</sup> rang	36	$36 + 12 = 48$	Non acceptable parce qu'il y a un seul rang de moins
4 <sup>e</sup> rang	48	$48 + 16 = 64$	
5 <sup>e</sup> rang	60	$60 + 20 = 80$	
6 <sup>e</sup> rang	72	$72 + 24 = 96$	Acceptable parce qu'il y a deux rangs de moins
7 <sup>e</sup> rang	84	$84 + 28 = 112$	
8 <sup>e</sup> rang	96		

Ou Comprendre qu'il y a 16 parasols par rang dans la nouvelle disposition.

- Procéder par essais en cherchant un multiple commun de 12 et 16 tel que ce soit le  $n^{\circ}$  de 16 et le  $(n + 2)^{\circ}$  de 12.
- Trouver que ce multiple est 96 et vérifier qu'il n'y a pas d'autres solutions.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (96 parasols) avec explications claires et calculs détaillés, ou description complète des essais effectués
- 3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes
- 2 Réponse correcte sans explication (ou seulement avec la phrase "nous avons fait des essais")  
ou raisonnement correct mais avec une erreur de calcul, par exemple la réponse 128 pour avoir calculé 8 rangs plutôt que 6 ( $24 : 4 = 8$ )
- 1 Réponse erronée due au fait d'avoir considéré seulement 12 parasols par rang ( $6 \times 12 = 72$ ), ou début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

## 9. DIE DREI AMEISEN - LES TROIS FOURMIS (Cat. 71)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver trois nombres naturels tels que le deuxième vaut 5 de moins que le double du premier, que le troisième est égal au deuxième et vaut 7 de plus que le premier.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'Adeline a rapporté moins de grains que les autres fourmis, Clotilde en a 7 de plus et Bérénice la même quantité que Clotilde.
- Comprendre qu'il manque 5 grains à Bérénice pour avoir deux fois ceux d'Adeline et en même temps (puisque'elle a le même nombre de grains que Clotilde) elle en a 7 de plus qu'Adeline.
- Puis déduire que  $5 + 7 = 12$  est exactement le nombre des grains qui, ajoutés à ceux d'Adeline, permettent d'atteindre son double. Conclure qu'Adeline a recueilli 12 grains, tandis que Bérénice et Clotilde ont recueilli  $12 \times 2 - 5$  et  $12 + 7$  respectivement, soit 19 grains chacune.

Cette conclusion peut être obtenue avec une représentation graphique.

- Ou procéder à des tentatives systématiques en tenant compte du fait que les grains d'Adeline ne peuvent pas être inférieurs à 3. Par exemple, si les grains collectés par Adeline étaient au nombre de 7, Bérénice en aurait 9 ( $7 \times 2 - 5$ ), et Clotilde 14 ( $7 + 7$ ), mais  $9 \neq 14$  et donc 7 n'est pas le bon nombre. Procéder ainsi et constater que si Adeline ramène 12 grains, Bérénice en recueille 19 ( $12 \times 2 - 5$ ), et Clotilde aussi ( $12 + 7$ ).
- Ou par une méthode algébrique ou pré-algébrique, noter A le nombre de grains apportés par Adeline. Bérénice en a  $2A - 5$  et Clotilde  $A + 7$ . Comparer les deux dernières expressions des nombres de grains de Bérénice et de Clotilde :  $2A - 5 = A + 7$  et en déduire, en résolvant l'équation par des méthodes algébriques ou par essais, que le nombre de grains d'Adeline est égal à 12. Par conséquent, les deux autres fourmis en ont 19.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (Adeline 12, Bérénice 19, Clotilde 19) avec une explication claire et complète de la procédure suivie (détail des relations trouvées, calculs ou tentatives possibles, résolution avec un graphique ou une procédure algébrique)
- 3 Réponse correcte avec une explication partielle ou imprécise
- 2 Réponse correcte sans explication
- 1 Début de recherche correct (par exemple, la seule représentation graphique correcte ou début de la symbolisation et de la formalisation des rapports)
- 0 Incompréhension du problème

## 10. DIE FÜNF RECHTECKE - LES CINQ RECTANGLES (I) (Cat. 71)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Former des rectangles composés chacun de quatre rectangles de périmètres 10, 14, 20 et 24 cm, et déterminer leurs périmètres.

#### Analyse de la tâche

- Observer la figure et comprendre pourquoi il y a différents rectangles, soit de 10, soit de 14, soit de 20 et soit de 24 cm de périmètre (ils peuvent tous être plus ou moins « allongés »).
- Comprendre que si on choisit la longueur d'un côté du rectangle de 10 cm de périmètre, la longueur de l'autre côté est déterminée et peut se calculer par la relation : le périmètre est la somme des quatre longueurs des côtés, deux largeurs et deux longueurs. Par exemple :  
 si l'on choisit 1 cm pour l'un des côtés, la mesure de l'autre sera 4 cm ( $10 = 2 \times 1 + 2 \times 4$ )  
 si l'on choisit 2 cm pour l'un des côtés, la mesure de l'autre sera 3 cm ( $10 = 2 \times 2 + 2 \times 3$ )  
 ... (et on peut aussi choisir des nombres non entiers)
- Constater que la largeur du rectangle de 10 cm de périmètre est aussi celle de son voisin de 20 cm de périmètre et les choix précédents donnent un rectangle de 1 cm sur 9 cm pour le premier choix et un rectangle de 2 cm sur 8 cm, pour le second
- Effectuer les mêmes constatations pour le rectangle de 14 cm de périmètre dont la longueur est la même que celle du premier ce qui conduit à un rectangle de 3 cm sur 4 cm pour le premier choix et un rectangle.  
 de même pour les rectangles de 24 cm de périmètre : de 3 cm sur 9 cm pour le premier choix et de 4 cm sur 8 cm pour le second.
- Utiliser les mesures des côtés de chaque petit rectangle pour calculer le périmètre du grand rectangle :  
 pour le premier choix :  $2 \times [(4 + 9) + (1 + 3)] = 34$  cm  
 pour le second choix :  $2 \times [(3 + 8) + (2 + 4)] = 34$  cm  
 et constater que ces deux périmètres sont égaux.
- Vérifier que, avec d'autres choix pour un côté du premier rectangle de 10 cm de périmètre, on obtient encore 34 cm pour le périmètre du grand rectangle. Par exemple avec 1,5 (ou 3) comme troisième choix : 1,5 sur 3,5 (ou 3 sur 2) ; 1,5 sur 8,5 (ou 3 sur 7) ; 3,5 sur 3,5 (ou 5 sur 2) et 3,5 sur 8,5, (ou 5 sur 7) le périmètre du grand rectangle est :  $2 \times [(3,5 + 8,5) + (1,5 + 3,5)] = 34$  cm (ou  $2 \times [(2 + 7) + (3 + 5)] = 34$ ). (la démonstration ou une justification de cette propriété n'est pas demandée).

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte et complète (les trois périmètres valent chacun 34 cm, avec des grands rectangles de dimensions différentes) avec détail des calculs pour chaque choix de dimensions du premier rectangle (nombres naturels ou décimaux) ou dessins expliqués
- 3 Réponse correcte et complète avec explications partielles ou peu claires  
 ou seulement deux solutions correctes avec détail des calculs pour chaque rectangle
- 2 Réponse correcte, sans explications  
 ou seulement une solution correcte  
 ou réponse erronée (aucun des périmètres est 34) due à des erreurs de calcul, mais procédure correcte et bien expliquée
- 1 Début de recherche correct, par exemple la mesure de quelques côtés, mais sans arriver à la conclusion
- 0 Incompréhension du problème

**11. IM PFERDESTALL - UNE GRANDE ÉCURIE (I) (Cat. 71)****ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver les nombres qui, multipliés par eux-mêmes donnent un produit compris entre 1000 et 1100.

**Analyse de la tâche**

- Se rendre compte que, puisque chaque cheval a mangé un nombre  $n$  de carottes égal à celui des chevaux de l'écurie, le nombre de carottes consommées par tous les chevaux est  $n \times n$ .
- Comprendre que ce nombre ( $n \times n$ ) doit être plus petit que 1100 ( $=11 \times 100$ ), nombre des carottes acquises, et plus grand que 1000, rechercher ce nombre par essais successifs à partir d'un nombre de chevaux hypothétique (par exemple 25 chevaux qui mangeraient en tout 625 carottes) et poursuivre jusqu'à l'obtention d'un nombre de carottes mangées compris entre 1000 et 1100.
- Trouver ainsi qu'il y a deux résultats possibles : **32** et **33** dont les carrés sont respectivement 1024 et 1089, et que ce sont seulement ceux-ci parce que  $31^2 = 961 < 1000$  alors que  $34^2 = 1156 > 1100$

Ou, calculer la racine carrée de 1000 (environ 31,6) et de 1100 (environ 33,2) et observer que les seuls nombres entiers compris entre les deux nombres obtenus sont 32 et 33.

- Conclure que dans l'écurie il peut y avoir 32 ou 33 chevaux

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (32 ou 33 chevaux) avec explications claires qui montrent l'exhaustivité de la réponse (calcul du carré de 31 et de 34 pour voir que ces solutions ne conviennent pas ou raisonnement par calcul de racines carrées)
- 3 Réponse correcte avec explications claires mais sans vérification qu'il n'y a pas d'autres solutions ou une solution correcte et une erronée due à un erreur de calcul avec explications claires
- 2 Réponse correcte sans explications ou une seule solution avec explications claires
- 1 Début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

## 12. FLIESEN - LE CARRELAGE (Cat. 71, 81)

### ANALYSE APRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver les dimensions possibles, en nombre entiers de décimètres, de carreaux rectangulaires dont la longueur est le double de la largeur, sachant qu'il en faut entre 200 et 1000 pour recouvrir un rectangle de 9 m sur 18 m.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que le sol à recouvrir et les carreaux sont des rectangles dont la longueur est le double de la largeur et que, par conséquent, les carreaux peuvent être posés, dans la position la plus simple par exemple, avec leurs longueurs et largeurs respectivement parallèles à celles du sol à recouvrir.
- Choisir de travailler avec une même unité, pour les dimensions du sol à recouvrir et les carreaux, de préférence en dm : le rectangle de  $90 \times 180$  dm a une aire de  $16200 \text{ dm}^2$ .
- Noter que les dimensions des carreaux doivent mesurer un nombre entier de décimètres et que, comme on n'utilise que des carreaux entiers, leur longueur doit être un diviseur de 180 (dm), de même que pour leur largeur qui est un diviseur de 90 (dm).

Il y a plusieurs manières d'organiser la recherche, dont les trois suivantes. Par exemple :

- a) En partant de l'aire du sol  $16200$  (en  $\text{dm}^2$ ) et de 200 à 1000 carreaux, calculer les aires minimales et maximales de carreaux qui sont  $16200/1000 = 16,2$  (en  $\text{dm}^2$ ) et  $16200/200 = 81$  (en  $\text{dm}^2$ ).

Les carreaux étant décomposables en deux carrés juxtaposés, les aires de ces carrés sont comprises entre  $16,2/2 = 8,1$  et  $81/2 = 40,5$  (en  $\text{dm}^2$ ). Les côtés de ces carrés (largeur du carreau) sont compris entre  $\sqrt{8,1} \approx 2,8$  et  $\sqrt{40,5} \approx 6,3$ .

Comme les dimensions des carreaux sont des nombres entiers, on peut envisager les couples **(3 ; 6)**, **(4 ; 8)**, **(5 ; 10)** et **(6 ; 12)** pour les (largeurs ; longueurs) des carreaux, et éliminer **(4 ; 8)** qui ne sont pas des diviseurs de 90 et 180.

- b) En partant des diviseurs de 90 et 180 pour trouver les largeurs et longueurs des carreaux et en calculant le nombre de carreaux à chaque fois :

<i>Diviseurs</i>	<i>Dimensions car.</i>	<i>Nb. total car.</i>	<i>Solutions acceptables</i>
1 et 2	90	$90^2 = 8100$	Non
2 et 4	45	$45^2 = 2025$	Non
<b>3 et 6</b>	<b>30</b>	<b><math>30^2 = 900</math></b>	<b>Oui</b>
<b>5 et 10</b>	<b>18</b>	<b><math>18^2 = 324</math></b>	<b>Oui</b>
<b>6 et 12</b>	<b>15</b>	<b><math>15^2 = 225</math></b>	<b>Oui</b>
9 et 18	10	$10^2 = 100$	Non
...			

- c) Organiser une recherche à partir de paires de valeurs entières dont l'une est le double de l'autre et dont le produit est contenu un nombre exact de fois dans damier du salon. Par exemple, à partir des tailles 1 et 2, la surface de la tuile sera de  $2 \text{ dm}^2$  et le nombre des tuiles sera de  $8100$  ( $16200 : 2$ ).

Continuer avec les autres paires de valeurs et n'accepter que les cas où le nombre de carreaux est un entier supérieur à 200 et inférieur à 1000.

Identifier les trois solutions possibles  $900 = 16\,200 \div (3 \times 6)$  ;  $324 = 16\,200 \div (5 \times 10)$  ;  $225 = 16\,200 \div (6 \times 12)$

#### Attribution des points

- Réponse correcte : les trois solutions en décimètres (3, 6) ; (5, 10) ; (6, 12) (ou en mètres (0,3 - 0,6) ; (0,5 - 1) ; (0,6 - 1,2)) avec les détails de la recherche et tous les calculs nécessaires pour les trouver
- Réponse correcte : les trois solutions avec des explications partielles ou absence de certains calculs ou deux solutions correctes et bien argumentées
- Réponse correcte : les trois solutions sans explication ou deux solutions avec des explications partielles ou des calculs manquants ou une solution correcte et bien argumentée
- Une ou deux solutions correctes sans explication ou le début d'une recherche cohérente sans parvenir à la conclusion
- Incompréhension du problème

**13. DAS SCHWIMMBECKEN - LA PISCINE** (Cat. 71, 81, 91, 10)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer les dimensions d'un rectangle connaissant son aire, le nombre et les dimensions des dalles carrées nécessaires pour paver son pourtour extérieur.

**Analyse de la tâche**

- Savoir que l'aire d'un rectangle s'obtient en faisant le produit de ses deux dimensions.
- Comprendre que le périmètre de la piscine, en prenant le côté d'une dalle pour unité, s'obtient en retirant 4 du nombre total de dalles.
- Observer que le demi-périmètre de la piscine, dans cette unité de mesure, est 60 (30 en mètres) et que par conséquent les nombres de dalles, dans la longueur comme dans la largeur, doivent être tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Exclure cette seconde éventualité puisque l'aire est un nombre pair (en m<sup>2</sup>)
- En déduire que la longueur et la largeur de la piscine ne peuvent être que des nombres entiers.
- Procéder par essais et ajustements :
  - Soit en cherchant deux nombres entiers pairs dont le produit est égal à 176, et dont la somme est 30 (en s'aidant éventuellement de la décomposition de 176 en facteurs).
  - Soit après avoir retiré 4 au nombre total de dalles ( $124 - 4 = 120$ ), calculer le périmètre du rectangle en m ( $120 \times 0,5 = 60$ ) et déterminer deux nombres entiers dont la somme est égale à 30 et le produit 176.
  - Soit après avoir retiré 4 au nombre total de dalles ( $124 - 4 = 120$ ), déterminer deux nombres entiers dont la somme est  $120 : 2 = 60$ , multiplier chacun de ces nombres par 0,5 pour obtenir deux dimensions correspondantes du rectangle. Effectuer ensuite le produit de ces deux nombres et le comparer à 176.
- Procéder comme précédemment mais en effectuant une recherche systématique qui, éventuellement, n'exclut pas la possibilité de nombres impairs de dalles par côté. Par exemple : considérer tous les couples de nombres compatibles avec les dimensions des dalles dont le produit est égal à 176 :  $0,5 \times 352$  ;  $1 \times 176$  ;  $2 \times 88$  ;  $4 \times 44$  ;  $5,5 \times 32$  ;  $8 \times 22$  ;  $11 \times 16$  et vérifier si pour chacun des couples trouvés le nombre correspondant de carrés de 0,5 m de côté est égal à 124. Par exemple pour  $(0,5 ; 352)$  :  $(0,5 : 0,5 + 352 : 0,5) \times 2 + 4 = 1414$ . Trouver que le seul couple solution est  $(8 ; 22)$  et que par conséquent il y a  $22 : 0,5 + 2 = 46$  dalles sur la longueur.
- Mettre le problème en équations. Si  $a$  désigne la largeur de la piscine et  $b$  sa longueur, arriver à  $a + b = 30$  et  $a \times b = 176$ . Procéder par essais et ajustements pour trouver  $a$  et  $b$  ou résoudre l'équation correspondante  $a^2 - 30a + 176 = 0$  dont les solutions sont 22 et 8.
- Ou factoriser 176 pour trouver les dimensions, en mètres, de la piscine :  $11 \times 16$ ,  $22 \times 8$ ,  $44 \times 4$ ,  $88 \times 2$ ,  $176 \times 1$  et retenir  $22 \times 8$  qui est la seule conduisant à 124 dalles.
- Les dimensions de la piscine sont 22 m et 8 m et il y a 46 dalles dans la longueur.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (46 dalles) avec description (texte, dessin ou calcul) de chacune des étapes de la recherche
- 3 Réponse correcte mais avec des étapes manquantes de la recherche ou seulement une vérification ou réponse erronée consécutive à des erreurs de calcul mais toutes les étapes de la recherche sont correctes et présentes
- 2 Réponse correcte sans explications ou réponse erronée due à la non prise en compte des 4 dalles dans les coins, mais pour le reste la procédure est correcte
- 1 Début de recherche correct (au moins la détermination de 2 nombres entiers ou « demi-entiers » dont le produit est 176 ou dont la somme est 60)
- 0 Incompréhension du problème

## 14. PRALINEN - LES PETITS CHOCOLATS (Cat. 81, 91, 10)

### ANALYSE PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver la somme de 5 nombres naturels  $a, b, c, d, e$  dont on connaît les sommes partielles :  $a + b = 27$  ;  $b + c = 31$  ;  $c + d = 26$  ;  $d + e = 18$  ;  $a + c + e = 36$ .

#### Analyse de la tâche

- Comprendre les données du problème : trouver le nombre de chocolats de chaque boîte et les additionner, connaissant les sommes des nombres de chocolats contenus dans quelques-unes des cinq boîtes.
- Procéder par essais successifs, par exemple en choisissant le nombre de chocolats de la première boîte, déduisant le nombre de ceux de la deuxième boîte et ainsi de suite pour vérifier si les résultats vérifient la dernière relation.
- Ou Observer que dans les sommes partielles exprimées dans l'énoncé les première, deuxième, quatrième et cinquième boîtes apparaissent deux fois alors que troisième apparaît trois fois.
- Déduire que  $138 = 27 + 31 + 26 + 18 + 36$  est la somme du double du nombre des chocolats de la première, deuxième, quatrième et cinquième boîtes et du triple du nombre de ceux de la troisième boîte.
- Se rendre compte, de la première et de la quatrième données, que la somme du nombre des chocolats contenus dans les première, seconde, quatrième et cinquième boîtes  $45 = (27 + 18)$  dont le double est 90.
- Trouver alors que  $138 - 90 = 48$  est le triple du nombre de chocolats contenus dans la troisième boîte, qui contient par conséquent  $16 (= 48 : 3)$  chocolats.
- En conclure que les cinq boîtes contiennent  $45 + 16 = 61$  chocolats ou déterminer ce nombre par substitutions successives de 16 dans les relations données.
- Ou De la première et deuxième données, déduire que la troisième boîte contient 4 chocolats de plus que la première, puis de la troisième et quatrième données que la cinquième boîte en contient 8 de moins que la troisième et que par conséquent si  $x$  est le nombre de chocolats de la première boîte, la troisième en contient  $x + 4$  et la cinquième  $x + 4 - 8 = x - 4$  ; puis, selon la dernière donnée  $x + x + 4 + x - 4 = 36$  d'où  $3x = 36$  et finalement  $x = 12$ , nombre de chocolats de la première boîte. Déduire alors successivement le nombre de chocolats de la deuxième boîte (15), de la troisième (16), de la quatrième (10), et de la cinquième (8).
- Ou Par voie algébrique, avec les nombres de chaque boîte  $a, b, c, d, e$ , traduire en équations les données et obtenir :  $a + b = 27$  ;  $b + c = 31$  ;  $c + d = 26$  ;  $d + e = 18$  ;  $a + c + e = 36$ . Procéder par substitutions successives, par exemple en extrayant  $b$  de la première relation et le substituant dans la deuxième, ... et ainsi de suite.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (61) avec explications claires et détaillées de la procédure suivie (essais explicités, approche algébrique, ...)
- 3 Réponse correcte (61) avec seulement une vérification ou avec explications incomplètes et/ou essais non explicités ou les nombres de chaque boîte sont trouvés (12, 15, 16, 10, 8), mais pas la somme, avec explications claires de la procédure suivie
- 2 Réponse correcte (61) sans explications ni vérification ou réponse erronée due à une erreur de calcul, avec procédure correcte ou les nombres de chaque boîte sont trouvés (12, 15, 16, 10, 8), mais pas la somme, avec explications incomplètes
- 1 Début de recherche cohérente ou, les nombres de chaque boîte sont trouvés (12, 15, 16, 10, 8), mais pas la somme, sans explications ou, cinq nombres trouvés qui ne satisfont que quatre des conditions (par exemple 18, 9, 22, 4, 14)
- 0 Incompréhension du problème



**15. IM PFERDESTALL - UNE GRANDE ÉCURIE (II)** (Cat. 81, 91, 10)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver les nombres qui, multipliés par eux-mêmes donnent un produit compris entre 900 et 1100 et tels que la somme de ce produit et du nombre de départ soit inférieure à 1100.

**Analyse de la tâche**

- Se rendre compte que, puisque chaque cheval a mangé un nombre  $n$  de carottes égal à celui des chevaux de l'écurie, le nombre de carottes consommées par tous les chevaux est  $n \times n = n^2$ .
- Reconnaître que le nombre  $n^2$  des carottes mangées doit être plus grand que 900 (puisque les carottes de neuf sacs ont été mangées) et qu'en les additionnant au nombre  $n$  des chevaux on doit obtenir un nombre plus petit ou égal à 1100.
- Procéder par essais successifs à partir d'un nombre de chevaux hypothétique jusqu'à l'obtention d'un nombre de carottes mangées compris entre 900 et 1100 et vérifier que la somme du nombre des chevaux et de celui des carottes mangées est plus petit que 1100.
- Expliciter les essais à partir, par exemple, de 25 chevaux. Éventuellement par un tableau comme celui-ci :

Nombre des chevaux	25	26	27	28	29	30	<b>31</b>	<b>32</b>	33
Nombre de carottes mangées	625	676	729	784	841	900	<b>961</b>	<b>1024</b>	1089
Somme des nombres de carottes mangées et de chevaux	650	702	756	812	870	930	<b>992</b>	<b>1056</b>	1122

- Reconnaître que 30 n'est pas une solution parce que plus de 9 sacs de carottes ont été utilisés mais que, l'écurie pourrait accueillir 31 ou 32 chevaux. En effet  $31 + 31^2 = 992$  et  $32 + 32^2 = 1056$ , résultats tous les deux plus petits que 1100
- Vérifier qu'il ne pourrait pas y avoir plus de chevaux car  $33^2 + 33 = 1122$  dépasse le nombre de carottes achetées.

Ou, partir du nombre  $n^2$  de carottes qui est compris entre 900 et 1100. Puisque  $30^2 = 900$  ne convient pas, considérer les carrés des nombres successifs qui respectent les limites souhaitées :  $31^2 = 961$ ,  $32^2 = 1024$  et  $33^2 = 1089$  (les suivants  $34^2 = 1156$  ne sont pas acceptables car ils sont plus grands que 1100). Les nombres 31, 32, 33 peuvent être sélectionnés. Contrôler pour chaque carré si la somme demandée est plus petite que 1100. Découvrir que c'est valable pour  $31^2 + 31 = 992$  et  $32^2 + 32 = 1056$ , mais pas pour  $33^2 + 33 = 1122$ . En déduire qu'il peut y avoir 31 ou 32 chevaux dans l'écurie.

Ou, résoudre le système d'inéquation  $900 < n^2 + n < 1100$ , où  $n$  est un nombre naturel tenant compte que  $n^2 > 900$ .

Puisque  $n^2 + n = n \cdot (n + 1)$  on peut procéder par essais organisés en cherchant un nombre qui, multiplié par son successeur, soit compris entre 900 et 1100. On trouve ainsi les solutions,  $n = 31$  et  $n = 32$ .

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (31 ou 32 chevaux) avec explications claires (détail des calculs et des essais, pose du système d'inéquations, ...) et justification de l'exhaustivité de la réponse (en contrôlant pour les carrés de 30 et 33)
- 3 Réponse correcte avec explications claires mais sans vérification qu'il n'y a pas d'autre solution  
ou une solution correcte et une erronée à cause d'une erreur de calcul avec détail des calculs
- 2 Réponse correcte sans explications  
ou une seule solution avec procédure claire
- 1 Une seule solution correcte sans explications  
ou réponse avec 33 en plus des deux solutions, sans vérifier la dernière condition  
ou début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

## 16. DER STURM - LA TEMPÊTE (II) (Cat. 81, 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver les nombres possibles d'objets pouvant être disposés en  $n$  files de  $n + 4$  ou en  $n - 2$  files de 16.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre comment sont disposés initialement les parasols : dans chaque file parallèle à la côte il y en a 4 de plus que dans les files perpendiculaires à la côte, formant un rectangle de dimensions  $n - 4$  et  $n$  (parasols).
- Noter que, après la tempête, le nombre de parasols reste le même mais qu'ils sont disposés en deux files de moins avec 16 parasols chacune :  $16 \times (n - 2)$
- Comprendre que le nombre de parasols est un multiple de 16 et que le nombre des files avant la tempête doit être supérieur à 2 et inférieur à 12 (sinon les parasols dans chaque file auraient déjà été 16 ou plus).
- Procéder par essais du nombre initial de files, en contrôlant que le nombre de parasols à redistribuer après la tempête soit divisible par le nouveau nombre de files et vérifier que le nombre final de parasols par file soit 16. Pour aider les correcteurs voici un tableau possible :

n° initial d files	parasols par file	parasols à redistribuer après la tempête	n° final de files	parasols ajoutés par file	n° final de parasols par file
3	7	14	1	$14:1=14$	$7+14=21$
4	8	16	2	$16:2=8$	$8+8=16$
5	9	18	3	$18:3=6$	$6+9=15$
6	10	20	4	$20:4=5$	$5+10=15$
7	11	22	5	$22:5$ n'est pas divisible	--
8	12	24	6	$24:6=4$	$4+12=16$
...	...	...	...	...	...

- Trouver ainsi les deux possibilités : 4 files initiales avec 4 + 4 parasols par file pour un total de **32** parasols, ou 8 files initiales avec 12 parasols par file pour un total de **96** parasols.
  - Comprendre qu'il n'y a pas d'autre solution parce qu'en continuant le tableau on obtient des nombres de parasols à redistribuer non divisibles par le nouveau nombre des files ou un nombre de parasols par file qui dépasse 16 et devient de plus en plus grand
  - Dans l'analyse des différents cas on peut exclure les nombres impairs qui donnent un nombre impair de parasols et par conséquent non divisible par 16
- Ou procéder par essais du nombre initial de files, calculer le nombre de parasols dans la disposition avant la tempête ( $n$  files de  $n + 4$  parasols chacune) et celui de la disposition après la tempête ( $n - 2$  files de 16 parasols chacune) et contrôler que les nombres obtenus soient égaux : par exemple avec 3 files initiales il y a  $3 \times (3 + 4) = 21$  parasols (avant la tempête) différent de  $1 \times 16 = 16$  (après la tempête), alors qu'avec 4 files initiales il y a  $4 \times (4 + 4) = 32$  (parasols (avant la tempête)) égal à  $2 \times 16 = 32$  (après la tempête) et ainsi de suite jusqu'à trouver l'autre solution : 96 parasols sur 8 files. Constater qu'il ne peut pas y avoir d'autre solution, éventuellement avec des considérations comme dans le cas précédent.

Cette procédure est plus rapide et permet de calculer aussi le nombre des parasols.

Ou par algèbre :

en notant  $n$  le nombre de files de la disposition initiale et donc  $(n + 4)$  le nombre initial de parasols par file et  $(n - 2)$  le nombre final de files, poser l'équation du second degré  $n(n + 4) = 16(n - 2)$ . Trouver les deux solutions  $n = 4$  et  $n = 8$ .

- Calculer ensuite le nombre total de parasols (respectivement **32** et **96**) en multipliant le nombre de files par 16.

#### Attribution des points

- Réponse correcte (**32** ou **96** parasols) avec explications claires et complètes (résolution de l'équation du second degré, ou essais bien organisés qui montrent l'exhaustivité des solutions)
- Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes (essais non exhaustifs, ou seulement « on a procédé par essais ») mais avec vérification des solutions  
ou réponse 4 et 8 indiquant les nombres possibles de files initiales avec explications claires, mais sans le calcul du nombre des parasols
- Une seule réponse correcte avec explications claires ou seulement une vérification des solutions  
ou une solution correcte et une autre erronée due à une erreur dans la résolution de l'équation ou d'une erreur de calcul dans les essais
- Une solution correcte sans explications ni vérification (ou seulement on a procédé par essais »)

ou une réponse qui ne donne que le nombre initial de files trouvé par essais sans le calcul du nombre total des parasols  
ou début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

## 17. DIE FÜNF RECHTECKE - LES CINQ RECTANGLES (II) (Cat. 81, 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Former des rectangles composés chacun de quatre rectangles de périmètres 10, 14, 20 et 24 cm, et déterminer leur périmètre et celui d'aire maximale.

#### Analyse de la tâche

- Observer la figure et comprendre pourquoi il y a différents rectangles de 10, 14, 20 et 24 cm de périmètre (ils peuvent être plus ou moins « allongés », et même carrés).
- Comprendre que si on choisit la longueur d'un côté du rectangle de 10 cm de périmètre, la longueur de l'autre côté est déterminée et peut se calculer par la relation : le périmètre est la somme des quatre longueurs des côtés, deux largeurs et deux longueurs. Par exemple :
  - si l'on choisit 1 cm pour la largeur, la longueur sera 4 cm ( $10 = 2 \times 1 + 2 \times 4$ )
  - si l'on choisit 1,5 cm pour la largeur, la longueur sera 3,5 cm ( $10 = 2 \times 1,5 + 2 \times 3,5$ )
- Constaté que toutes les autres dimensions des trois autres petits rectangles et du grand sont aussi déterminées par la valeur choisie pour une des dimensions du premier petit rectangle.
- Pour répondre aux deux questions sur le périmètre et l'aire les calculs peuvent par exemple être regroupés sous cette forme ordonnée à partir d'une dimension du premier rectangle, de 10 cm :

p = 10	p = 20	p = 14	p = 24	Dim. grand	p grand	Aire (cm <sup>2</sup> )
(1 ; 4)	(1 ; 9)	(3 ; 4)	(3 ; 9)	(13 ; 4)	34	52
(1,5 ; 3,5)	(1,5 ; 8,5)	(3,5 ; 3,5)	(3,5 ; 8,5)	(12 ; 5)	34	60
(2 ; 3)	(2 ; 8)	(4 ; 3)	(4 ; 8)	(11 ; 6)	34	66
(2,5 ; 2,5)	(2,5 ; 7,5)	(4,5 ; 2,5)	(4,5 ; 7,5)	(10 ; 7)	34	70
(3 ; 2)	(3 ; 7)	(5 ; 2)	(5 ; 7)	(9 ; 8)	34	<b>72</b>
(3,5 ; 1,5)	(3,5 ; 6,5)	(5,5 ; 1,5)	(5,5 ; 6,5)	(8 ; 9)	34	<b>72</b>
(4 ; 1)	(4 ; 6)	(6 ; 1)	(6 ; 6)	(7 ; 10)	34	70
(4,5 ; 0,5)	(4,5 ; 5,5)	(6,5 ; 0,5)	(6,5 ; 5,5)	(6 ; 11)	34	66

et constater la constance du périmètre et l'augmentation puis la diminution « symétriques » de l'aire autour de 72 pour les valeurs de 3 et de 3,5, pour comprendre qu'il est nécessaire d'insérer une nouvelle valeur 3,25 :

p = 10	p = 20	p = 14	p = 24	Dim. grand	p grande	Aire (cm <sup>2</sup> )
(3,25 ; 1,75)	(3,25 ; 6,75)	(5,25 ; 1,75)	(5,25 ; 6,75)	(8,5 ; 8,5)	34	<b>72,25</b>

Constater alors, vu la « symétrie » des variations (augmentations suivies de diminutions correspondantes) que le plus grand rectangle a une aire de 72,25 cm<sup>2</sup>.

- On peut aussi arriver à cette conclusion en sachant que, parmi tous les rectangles de 34 cm de périmètre, c'est le carré de 8,5 cm de côté dont l'aire est la plus grande.
- Où : résoudre le problème par la recherche du maximum de la fonction  $A = x(17 - x)$  où la variable est le premier côté d'un rectangle de 34 cm de périmètre.

#### Attribution des points

- Réponses correctes et complètes (tous les périmètres mesurent 34 cm et l'aire maximale est 72,25 cm<sup>2</sup>), avec les détails de tous les calculs.
- Réponses correctes et complètes avec explications partielles ou peu claires  
ou réponse correcte pour les périmètre et une aire de 72 cm<sup>2</sup> avec explications claires (le maximum n'ayant pas été envisagé lorsque le grand rectangle devient un carré de côté 8,5,)
- Réponses correctes et complètes sans explications  
ou réponse correcte pour les périmètre et une aire de 72 cm<sup>2</sup> avec explications partielles et peu claires  
ou réponse erronée due à une seule erreur de calcul, avec des explications claires
- Début de recherche cohérent
- Incompréhension du problème

**18. ZEICHNEN, WELCH EINE FREUDE - LE DESSIN, QUELLE PASSION !** (Cat. 81, 91, 10)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver les nombres de trois types, d'objets connaissant le prix unitaire de chacun 0,25 ; 1,50 ; et 5 (en €), le nombre total d'objets (50) et leur prix total (50 €).

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il y a 50 objets achetés, pour 50 euros, qu'on connaît le prix de 1 crayon de couleur (0,25), d'un feutre (1,50) et d'un album de dessin (5) mais qu'on ne sait pas combien il y a d'objets de chaque sorte et que c'est justement l'objet de la question.
- Considérer que l'on connaît les prix unitaires des objets achetés et le coût total et qu'il faut trouver le nombre de chacun des trois types d'objets achetés.
- Comprendre que l'on doit chercher trois nombres naturels dont la somme est 50 et qui, multipliés, respectivement, par 0,25 par 1,50 et par 5 donnent une somme de 50.
- Exprimer les relations entre les grandeurs en jeu mentionnées dans l'énoncé. Par exemple, en notant  $c, f, a$ , respectivement le nombre de crayons, feutres et albums, achetés, écrire les deux équations  $c + f + a = 50$  et  $0,25c + 1,5f + 5a = 50$ .  
Constater qu'il s'agit d'un système (linéaire) de deux équations à trois inconnues dont seules les solutions entières positives seront prises en considération (parmi le nombre infini de solutions).  
Choisir  $a$  par exemple comme valeur positive et résoudre les deux équations en  $c$  et  $f$  (d'une manière ou d'une autre), pour obtenir les expressions en  $c$  et  $f$ :  $c = 20 + (14/5)a$ ;  $f = 30 - (19/5)a$ . Comprendre que la seule valeur acceptable pour obtenir un résultat positif est  $a = 5$ .  
Conclure qu'Alex achète 34 crayons ( $20 + 14$ ), 11 feutres ( $30 - 19$ ) et 5 albums.

Ou (procédure longue avec risque d'erreurs) :

- Procéder par essais, qui s'organiseront progressivement. Par exemple considérer qu'un album coûte 5 euros et qu'on ne peut pas en acheter plus de 9, essayer avec 4 albums (20 euros) et contrôler s'il pourrait acheter 46 objets (crayons et feutres), et continuer jusqu'à arriver à 5 albums et d'acheter encore 45 objets avec les 25 euros restants : 34 crayons et 11 feutres ( $25 = 0,25 \times 34 + 1,5 \times 11$ ).

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (34 crayons et 11 feutres et 5 albums) avec l'indication claire et complète de la procédure suivie, avec le détail des opérations ( $34 \times 0,25 + 11 \times 1,5 = 25$ ) qui servent de vérification (l'indication des inconnues, la mise en équation et la résolution ou le détail des essais et des calculs effectués)
- 3 Réponse correcte avec une explication incomplète ou peu claire de la procédure suivie
- 2 Réponse correcte sans explications  
ou une procédure correcte mais une réponse erronée due à une erreur de calcul  
ou réponse correcte avec seulement la vérification des contraintes pour 34 crayons et 11 feutres et 5 albums
- 1 Début de recherche approprié (tentatives qui montrent la compréhension des contraintes du problème, mais sans parvenir à une solution),  
ou la pose du système d'équations et quelques tentatives qui ne conduisent pas à la solution
- 0 Incompréhension du problème (par exemple, essais qui ne tiennent pas compte des contraintes du problème)

## 19. EIN MAROKKANISCHES MOSAIK - UNE MOSAÏQUE DU MAROC (Cat. 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

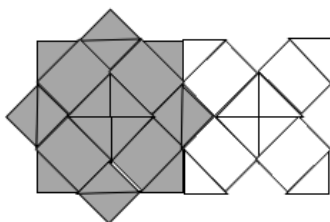
#### Tâche mathématique

Calculer le rapport des aires de deux types de figures d'une mosaïque, par décompositions en demi-carrés triangulaires et rectangles dont un côté est celui d'un carré et l'autre celui de sa diagonale.

#### Analyse de la tâche

- Se rendre compte que, le nombre de carreaux gris et le nombre de carreaux blancs est approximativement le même sur une paroi constituée de milliers de carreaux et qu'il suffit de comparer les aires d'un carreau de chaque sorte.
- Chercher à paver chacun des carreaux par des carrés, rectangles et petits triangles. Les petits triangles se remarquent directement sur l'extérieur des deux polygones ; 4 sur le carreau à "croix" en blanc, 8 sur le carreau gris. Remarquer que les deux branches de la croix se superposent en un carré central laissant un rectangle et un triangle sur chaque bras. On peut aussi imaginer une même structure en croix même dans le carreau gris.

Par exemple, voici un pavage :

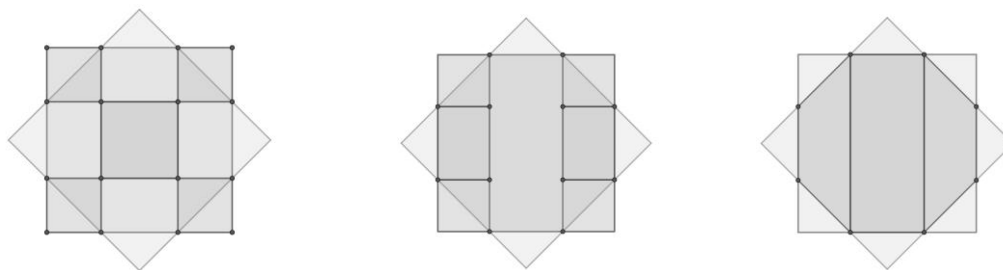


Le carreau gris se décompose en 16 triangles (isocèles rectangles) et 4 rectangles, le carreau blanc en 8 triangles et 4 rectangles. Les aires des triangles sont égales à  $12,5 = 25/2 \text{ cm}^2$ . Les rectangles ont 5 cm de largeur, leur longueur est celle de l'hypoténuse d'un triangle qui peut se calculer par Pythagore ou comme le côté du carré central :  $\sqrt{50} \text{ cm}$  qu'on peut arrondir à 7,0 ou 7,1. L'aire d'un rectangle est donc  $5 \times \sqrt{50} \approx 35 \approx 35,5$

- Calculer l'aire des deux carreaux et le rapport :  
 L'aire d'un carreau blanc :  $8 \times 25/2 + 4 \times (5 \times \sqrt{50}) = 100 + 20 \times \sqrt{50}$  (en  $\text{cm}^2$ ) ou  $(100 + 100\sqrt{2} \approx 240 \approx 241)$   
 L'aire d'un carreau gris :  $16 \times 25/2 + 4 \times (5 \times \sqrt{50}) = 200 + 20 \times \sqrt{50}$  (en  $\text{cm}^2$ ) ou  $(200 + 100\sqrt{2} \approx 340 \approx 341)$   
 Le rapport des aires en blanc / aires en gris est  $(100 + 20\sqrt{50}) / (200 + 20\sqrt{50}) = 1/\sqrt{2} \approx 0,7 \approx 0,71$
- En cas de mesures (approximatives) directes sur un dessin avec 7 cm pour l'hypoténuse du triangle, le calcul des mesures des aires donne, en  $\text{cm}^2$  : carré central  $7^2 = 49$ , rectangle  $7 \times 5 = 35$  dont on tire l'aire d'un carreau gris :  $49 + 4 \times 35 + 4 \times 25/2 = 340 \text{ (cm}^2\text{)}$ , l'aire d'un carreau blanc  $49 + 4 \times 35 + 4 \times 25/2 = 240 \text{ (cm}^2\text{)}$  et leur rapport est à peu près égal à  $240/340 \approx 0,7$ .

Il y a de nombreuses autres manières de déterminer les aires, par des procédures algébriques ou par d'autres décompositions des figures, en se référant ou non à Pythagore, en utilisant ou non l'écriture  $\sqrt{2}$

L'aire d'un carreau gris, par exemple, peut être calculé à partir des subdivisions suivantes :



#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (0,7 ou 0,71 ou une autre approximation, ou  $1/\sqrt{2}$  ou  $\sqrt{2}/2 \dots$ ) avec description claire et complète de la procédure (dessins des décompositions, avec détails des calculs, ou à partir d'une mesure approchée à 7 cm de l'hypoténuse d'une « pointe », triangle isocèle rectangle 5 ; 5 ;  $5\sqrt{2}$ ).
- 3 Réponse correcte avec seulement quelques détails de la procédure, ou recherche correcte des deux aires sans le calcul du rapport.
- 2 Réponse correcte sans détails,  
ou réponse erronée avec une faute de calcul, ou l'aire d'un des polygones correcte (l'étoile ou la croix) avec détails.
- 1 Aire correcte d'un des polygones sans détails, ou aire d'une « pointe » avec détails ou début de recherche cohérent (subdivision correcte des deux polygones, tentatives de mesures sur un dessin à l'échelle...)
- 0 Incompréhension du problème