

**6. LE COFFRE DE MATT ET MATIC – MATTS UND MATICS TRUHE (Cat. 71)****ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Résoudre en nombres entiers de 0 à 9 le système d'équations  $A = C - 4$  ;  $B = A + 2$  ;  $D = C/4$  et  $E = A + C - 3$ , dont la solution est constituée de 5 nombres différents.

**Analyse de la tâche**

- Repérer que C est un multiple de 4 ( $D = C \div 4$ ), C vaut 0, 4 ou 8.
- Écarter la valeur 0 pour C à cause de la première égalité ( $A = C - 4$ ) qui impose  $C > 3$ .
- Tester les contraintes pour :
  - o C = 4 alors A vaut 0 ( $C - 4$ ), B = 2, D = 1 et E = 1, ce qui donne le code 02411 inacceptable car il ne respecte pas la contrainte « nombres tous différents ».
  - o C = 8 alors D vaut 2, A vaut 4, B vaut 6, E vaut 9 ( $8 = E - 4 + 3$ ) ce qui donne le code 46829 qui respecte toutes les conditions.

Ou

- Dédire de la première égalité ( $A = C - 4$ ) que C ne peut pas prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 et que A ne peut pas être supérieur ou égal à 6 ;
- Faire varier les valeurs de C (4, 5, 6, 7, 8, 9) ou les valeurs de A (0, 1, 2, 3, 4, 5) dans toutes les équations et éliminer au fur et à mesure les valeurs ne respectant pas toutes les contraintes.

Ou

- Construire une solution systématique en partant de A ou de D (et poursuivre tant que les valeurs obtenues sont des nombres de 0 à 9 différents, sans oublier de calculer E à la fin).

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte écrite (46829), avec des explications claires qui montrent que l'on a tenu compte de toutes les contraintes
- 3 Réponse correcte avec explication peu claire,  
ou toutes les valeurs des lettres ont été trouvées, avec des explications claires mais le code secret n'est pas indiqué
- 2 Réponse correcte (46829) sans explications,  
ou réponse où les chiffres sont trouvés mais ont été reportés dans le code dans un ordre incorrect  
ou réponse (02411) ne respectant pas la contrainte « nombres différents » avec des explications claires qui montrent que l'on a tenu compte de toutes les autres conditions.
- 1 Début de recherche correct.
- 0 Incompréhension du problème.

## 7. LES TOURS – DIE TÜRME (Cat. 71)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver un nombre inférieur à 50 qui dépasse de 2 un multiple de 3, de 1 un multiple de 4, et de 4 un multiple de 5.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre recherché ne peut pas être un multiple de 3, de 4 ou de 5.
- Comprendre qu'à chaque fois la hauteur des tours qu'elle a construites est la même, que le nombre des cubes de la boîte divisé par 3 donne le reste 2 dans le premier cas, divisé par 4 donne le reste 1 dans le second cas, et divisé par 5 donne le reste 4 dans le troisième cas. Un tel nombre devra donc figurer dans chacune des listes suivantes :
  - multiples de 3 "plus 2": 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32 ....
  - multiples de 4 "plus 1": 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, ...
  - multiples de 5 "plus 4": 9, 14, 19, 24, 29, 34, ...

et constater que le seul nombre qui figure dans les trois listes est 29.

Ou

- Tenir compte du nombre de cubes qui doivent rester dans les trois cas.
- Commencer, par exemple, par considérer la construction de cinq tours : pour obtenir un reste 4, il est nécessaire d'avoir un nombre de cubes dont le chiffre des unités est 4 ou 9 ( $0 + 4$  ou  $5 + 4$ ).
- Observer que pour la construction de quatre tours, il n'y a aucune possibilité que le nombre de cubes utilisés ait le chiffre 4 aux unités et qu'il ne peut donc y avoir que le chiffre 9 (9, 19, 29, 39, 49). Découvrir alors que seul 9 et 29 répondent à la condition.
- Observer finalement que pour la construction de trois tours, pour les nombres en-dessous de 50, le seul qui réponde à la condition est 29.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (29 cubes) avec le détail de la procédure suivie (calculs ou description verbale ou les trois listes de nombres possibles).
- 3 Réponse correcte avec une présentation partielle ou peu claire de la procédure suivie.
- 2 Réponse correcte sans aucune explication,  
ou une réponse erronée, mais avec une procédure appropriée pour deux types de tours avec une explication détaillée.
- 1 Réponse incorrecte car elle ne tient compte que de multiples sans considérer les restes,  
ou début de recherche cohérente.
- 0 Incompréhension du problème.

**8. BOÎTES DE CRAIES I – KREIDESCHACHTELN I** (Cat. 71, 81)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Chercher tous les nombres inférieurs à 200 dont le nombre des dizaines est le double de celui qui est donné par le chiffre des unités.

**Analyse de la tâche**

- S'approprier la situation : le directeur a d'abord attribué 10 boîtes à chaque classe. Comprendre que le nombre de boîtes restantes est égal à la moitié du nombre de classes.
- En déduire que le nombre de classes est un nombre pair. Puisqu'il est inférieur à 20, le nombre de boîtes restantes est un entier inférieur à 10.
- Procéder par essais organisés en faisant l'hypothèse d'un certain nombre de classes. Noter que chaque classe aura dans la première distribution 10 boîtes de craies. Le nombre de boîtes achetées est donc égal à 10 fois le nombre de classes plus la moitié de ce nombre. En donnant successivement au nombre de classes les valeurs : 2, 4, ... , 16, 18, obtenir tous les nombres possibles de boîtes que le directeur a achetées. On obtient ainsi les nombres possibles : 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189.

Ou bien,

- Se rendre compte que le nombre de boîtes achetées est égal à 10 fois le nombre de classes plus la moitié de ce nombre. Il est de la forme  $n = 10,5x$ . On obtient donc les valeurs possibles pour  $n$  : 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189) qui montre clairement le procédé suivi et met en évidence l'exhaustivité (ou l'impossibilité d'autres solutions).
- 3 Réponse correcte avec un procédé peu clair ou qui ne souligne pas l'exhaustivité.  
Ou seulement 7 ou 8 nombres corrects sans erreurs et avec une procédure claire.
- 2 Seulement 5 ou 6 nombres corrects sans erreurs et avec une procédure claire.
- 1 Début de recherche cohérente : moins de 5 nombres corrects (par exemple seulement ceux de la première centaine qui traduit la confusion entre nombre de dizaines et chiffre des dizaines).
- 0 Incompréhension du problème.

## 9. CITRONNADE FRAÎCHE – FRISCHE LIMONADE (Cat. 71, 81)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Dans le contexte d'une recette à deux ingrédients, étant données deux quantités déjà préparées à mélanger, trouver de combien il faut augmenter la quantité d'un des ingrédients pour respecter la proportionnalité des ingrédients donnés dans la recette d'origine.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'une fois mélangées les deux préparations dans le même récipient, il faut comparer ce mélange à la vieille recette pour déterminer le motif de l'insatisfaction de Lucia.
- Le mélange est obtenu en additionnant les quantités de chaque ingrédient des deux préparations : 1900 ml ( $1200 + 700$ ) de jus de citron, pour 22 ( $10 + 12$ ), cuillerées de sucre. Il s'agit ensuite d'identifier ces deux grandeurs, nombre de cuillerées de sucre et volume de jus de citron, et de faire correspondre les quatre mesures, par exemple sur deux lignes, (ou sur deux colonnes) :
 

nombre de cuillerées de sucre	4	22
volume de jus de citron en ml	200	1900
- Pour répondre à la question sur le type d'opération à faire entre ces quatre termes, il faut faire appel aux connaissances acquises sur les problèmes de recettes, ou à l'intuition de la proportionnalité, ou encore au "bon sens" pour se rendre compte que ces opérations ne sont pas des additions ou des soustractions, mais sont des multiplications ou des divisions et que la recette n'est pas limitée au couple (4, 200), mais s'étend à toutes les autres quantités, comme par exemple (2 ; 100), (1 ; 50).
- Il y a alors une grande variété de manières de compléter le tableau pour se rapprocher du couple (22, 1900) : par le passage à l'unité, par les propriétés du produit ou de la somme, par approximations successives, etc. Voici quelques exemples, entre autres, de couples de recettes qui peuvent approcher le couple (22, 1900) du mélange :
 

nb. de cuillerées de sucre	4	2	1	10	20	<b>38</b>	<b>22</b>	22
ml de jus de citron	200	100	50	500	1000	<b>1900</b>	<b>1100</b>	1900
- La comparaison entre le couple (22, 1100) de la vieille recette et le couple (22 ; 1900) du mélange, montre qu'il faudrait enlever 800 ml de jus de citron du mélange, chose qu'il n'est pas possible de faire, évidemment. La comparaison entre le couple (38 ; 1900) selon la recette et le couple (22 ; 1900) du mélange montre par contre qu'il faudra ajouter 16 cuillerées de sucre pour respecter la recette.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (sucre, 16 cuillerées) avec une description claire de la procédure, avec le détail des calculs ou un tableau.
- 3 Réponse correcte avec description partielle ou seulement quelques calculs.
- 2 Réponse correcte sans description de la procédure suivie,  
ou réponse erronée due à une erreur de calcul, mais avec description de la procédure suivie,  
ou réponse erronée (38 cuillerées de sucre) due à l'oubli du calcul de la différence  $38 - 22$ .
- 1 Début de recherche cohérente.
- 0 Incompréhension du problème

## 10. LES CUBES DE NICOLAS – NICOLAS' WÜRFEL (Cat. 71, 81)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer toutes les manières possibles de colorer des cubes avec cinq couleurs différentes, de manière que les faces opposées aient la même couleur et que les faces voisines aient des couleurs différentes.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que trois couleurs sont nécessaires et suffisantes pour colorer un cube, étant donné qu'un cube a seulement trois paires de faces opposées et que des faces voisines doivent avoir des couleurs différentes. Comprendre que deux cubes colorés correctement sont différents s'ils diffèrent par au moins une couleur.
- Comprendre que c'est seulement le choix des trois couleurs qui distingue les cubes entre eux, l'ordre du choix n'intervient pas. Déterminer ensuite toutes les manières possibles avec lesquelles on peut choisir un groupe de trois couleurs différentes parmi cinq couleurs.
- Commencer par choisir les couleurs trois à trois entre les cinq données : O, B, J, R, V, et déterminer toutes les combinaisons possibles en procédant de manière plus ou moins systématique :

O, B, J	O, J, R	B, J, R	J, R, V
O, B, R	O, J, V	B, J, V	
O, B, V	O, R, V	B, R, V	

- Conclure qu'il y a 10 combinaisons possibles donc 10 cubes différents possibles.

Ou bien,

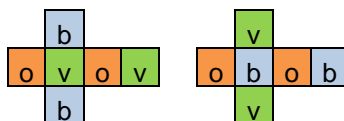
- construire des cubes en carton, ou dessiner des patrons, les colorer en respectant les conditions imposées et déterminer ainsi 10 cubes différents. Cependant, ces procédures ne conduisent pas à la détermination de toutes les possibilités si on ne procède pas de manière organisée.

Ou bien (procédure experte),

- utiliser un raisonnement de type combinatoire : la première couleur peut être choisie de cinq manières différentes, la seconde de quatre, la troisième de trois, on obtient donc  $60 = 5 \times 4 \times 3$  triplets ordonnés de couleurs différentes. Comme l'ordre du choix n'intervient pas, remarquer que, six par six, les triplets donnent le même cube, donc diviser 60 par 6, pour obtenir 10 cubes différents.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte, 10 cubes, avec une description claire et complète de la procédure (condition nécessaire et suffisante des trois couleurs, liste organisée de solutions ou raisonnement qui montre qu'il n'y en a pas d'autres ou représentation codée des couleurs des faces des cubes).
- 3 Réponse correcte avec une description partielle ou peu claire de la procédure ou seulement la liste des dix cubes différents sans indiquer leur nombre total,  
ou réponse erronée (11 ou 9) à cause d'une répétition ou d'un oubli avec description claire et complète de la procédure.  
Exemple de répétition :



- 2 Description d'au moins 5 cubes différents, (réponse 5, 6, 7, 8 cubes), ou plus d'un doublon en plus des 10 solutions correctes (réponse 12, 13, 14, 15 cubes).
- 1 Réponse correcte sans description de la procédure,  
ou détermination de 3 ou 4 cubes différents avec présence éventuelle de doublons,  
ou début de raisonnement correct de type combinatoire, mais pas mené à terme.
- 0 Incompréhension du problème ou toute autre réponse.

## 11. LA BANDE DE LILI – LILIS BAND (Cat. 71, 81)

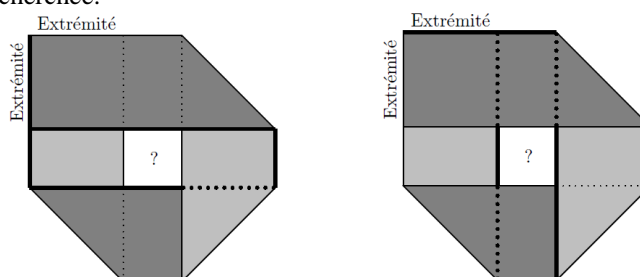
### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Calculer la mesure d'un carré formé après pliages, connaissant les dimensions de la figure initiale.

#### Analyse de la tâche

- Reconstruire visuellement les trois étapes de la construction pour identifier les propriétés des pliages : angles des plis pour obtenir la perpendicularité des parties de la bande, face gris foncé et face gris clair...
- Essayer éventuellement de découper une bande et de la plier pour se rendre compte que pour obtenir un carré au centre avec des extrémités exactement superposées, on ne peut pas aboutir sans savoir en quel point effectuer le premier pli, et à plus forte raison les suivants.
- Reconnaître dans la troisième illustration un carré de 4 cm de côté, quatre rectangles de 4 cm de longueur et avec largeur le côté du petit carré, trois triangles rectangles isocèles, moitié du carré  $4 \times 4$  situé en haut à gauche.
- Se rendre compte qu'il est possible de décomposer la longueur de la bande de 30 cm en 5 morceaux de 4 cm et en 4 morceaux de la longueur recherchée.



- Trouver ainsi que 4 fois la longueur cherchée correspond à 10 cm ( $30 - (5 \times 4)$ ) et en déduire que le côté du carré mesure 2,5 cm ( $10 : 4$ ).

Ou

- Construire la bande en vraie grandeur (ou à l'échelle), réaliser le pliage (ce qui n'est pas simple lorsqu'on ne connaît pas la longueur qui détermine le premier pli) par essais successifs et mesurer ensuite les longueurs des côtés de la figure centrale qui est approximativement un carré, et obtenir une valeur imprécise.

Ou

- Mesurer sur la figure la longueur du côté du carré central et celle de l'extrémité de la bande. Calculer le rapport entre ces deux longueurs et en déduire la mesure de la longueur du côté du carré central (démarche peu probable).

Erreurs possibles :

Réponse 3,5 cm due à l'oubli de comptabiliser la longueur correspondant aux morceaux superposés (erreur de dénombrement).

Ou prendre le périmètre de la figure comme longueur de la bande

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (2,5 cm) avec des explications claires et complètes (détails de la démarche par écrit, calcul ou dessins)
- 3 Réponse correcte (2,5 cm) avec des traces des calculs effectués
- 2 Réponse correcte (2,5 cm) sans explication ni justification  
Ou réponse erronée due à une erreur de calcul ou de dénombrement
- 1 Début de recherche cohérente (par exemple : décomposition de la longueur 30 sur le dessin ou repérage des longueurs correspondant à 4 cm, ...)
- 0 Incompréhension du problème (par exemple, si les calculs se basent sur le contour de la figure (plis en diagonales), ...)

**12. LE POTAGER I – DER GEMÜSEGARTEN I** (Cat. 71, 81)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Diviser un triangle en deux triangles dont l'un est d'aire double de celle de l'autre.

**Analyse de la tâche**

- Se rendre compte qu'il n'est pas possible de calculer l'aire du potager, car l'énoncé ne donne que les mesures de deux côtés du triangle ABC.
- Observer le triangle ABC du potager de Marc. L'aire du triangle BAD doit être le double (solution 1) ou la moitié (solution 2) de celle du triangle DAC.
- Constaté que les triangles ADB et ADC, ont la même hauteur issue de A. Donc, pour qu'une aire soit le double de l'autre, ils doivent avoir leurs bases dans le même rapport 2, donc  $BD = 2 DC$  ou  $DC = 2 BD$ .
- En déduire que le pieu D doit être planté à 8 m ou à 16 m de C.

Ou :

- Tirer du dessin la mesure de la hauteur nécessaire pour calculer les aires et les bases des triangles ADB et ADC en obtenant ainsi des valeurs approchées.

**Attribution des points**

- 4 Réponse complète (D à 8 m ou à 16 m de C), avec des explications claires et complètes (constater que les deux triangles ont la même hauteur, avec une représentation graphique qui montre la hauteur commune).
- 3 Réponse complète avec des explications partielles ou peu claires, ou une seule valeur (8 m ou 16 m) avec des explications claires.
- 2 Une seule valeur donnée (8 m ou 16 m) avec des explications partielles ou absentes.
- 1 Une réponse approximative obtenue par des mesures sur le dessin, ou début de raisonnement correct avec une représentation graphique correcte.
- 0 Incompréhension du problème.

### 13. LE PONT DES AMOUREUX – DIE BRÜCKE DER VERLIEBTEN (Cat. 81, 91, 10)

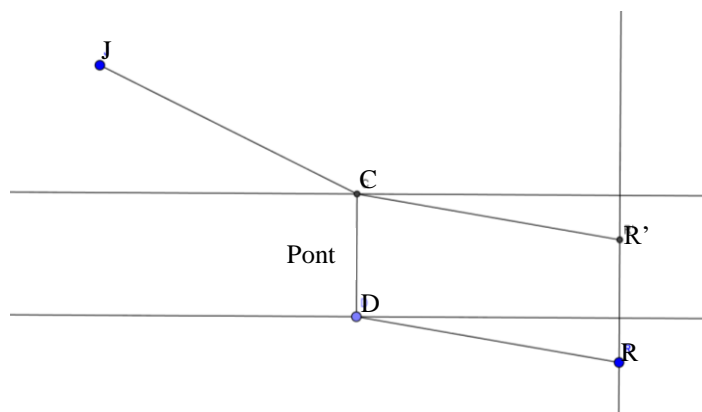
#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

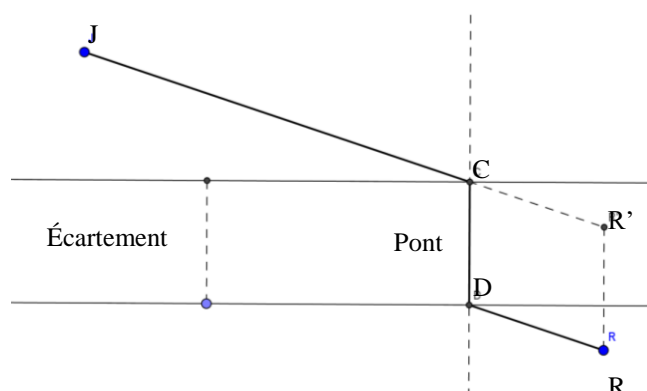
Déterminer une ligne polygonale dont la longueur est la plus courte possible, incluant un segment le plus court possible entre deux parallèles, dans le contexte d'une rivière à traverser.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre que le pont, pour être le plus court possible, doit être perpendiculaire aux berges de la rivière (distance entre deux droites parallèles).
- Essayer d'abord différentes positions du pont, en reliant les extrémités du pont aux maisons, et en comparant les longueurs des trajets obtenus.
- Se rendre compte que les écarts entre les longueurs obtenues lors des différents essais sont petits et que des mesures ne seront pas suffisantes pour répondre avec précision à la question posée.
- Réaliser que la longueur du pont est constante puisque les berges sont parallèles et qu'elle n'a pas d'influence sur la longueur d'un trajet.
- Donc chercher le chemin le plus court revient à chercher la position du pont [CD] tel que la distance  $JC+DR$  soit minimale. Le plus important est de bien placer le point C pour tracer le plus court chemin allant d'une maison à l'autre.
- Pour cela, procéder par exemple de la manière suivante : placer un point  $R'$  tel que  $CDR'R$  soit un parallélogramme :
  - Prendre la distance entre les berges : tracer une perpendiculaire aux berges et prendre la distance entre les points d'intersection de cette droite avec les droites représentant les berges
  - À partir du point R, tracer un segment  $RR'$  perpendiculaire aux berges de longueur égale à l'écartement entre les berges
- Comprendre que rechercher la distance  $JC+DR$  minimale revient à rechercher la distance  $JC+CR'$  minimale, car  $CR'$  est égal  $DR$  puisque  $CDR'R$  est un parallélogramme.
- Prendre conscience que cette distance est minimale si le point C est aligné avec J et  $R'$  puisque J et  $R'$  sont fixés par l'énoncé ou les constructions qui en découlent.
- Tracer la droite  $(JR')$  et placer le point C, point d'intersection de  $(JR')$  avec la berge la plus proche de J



- Tracer le chemin suivant :



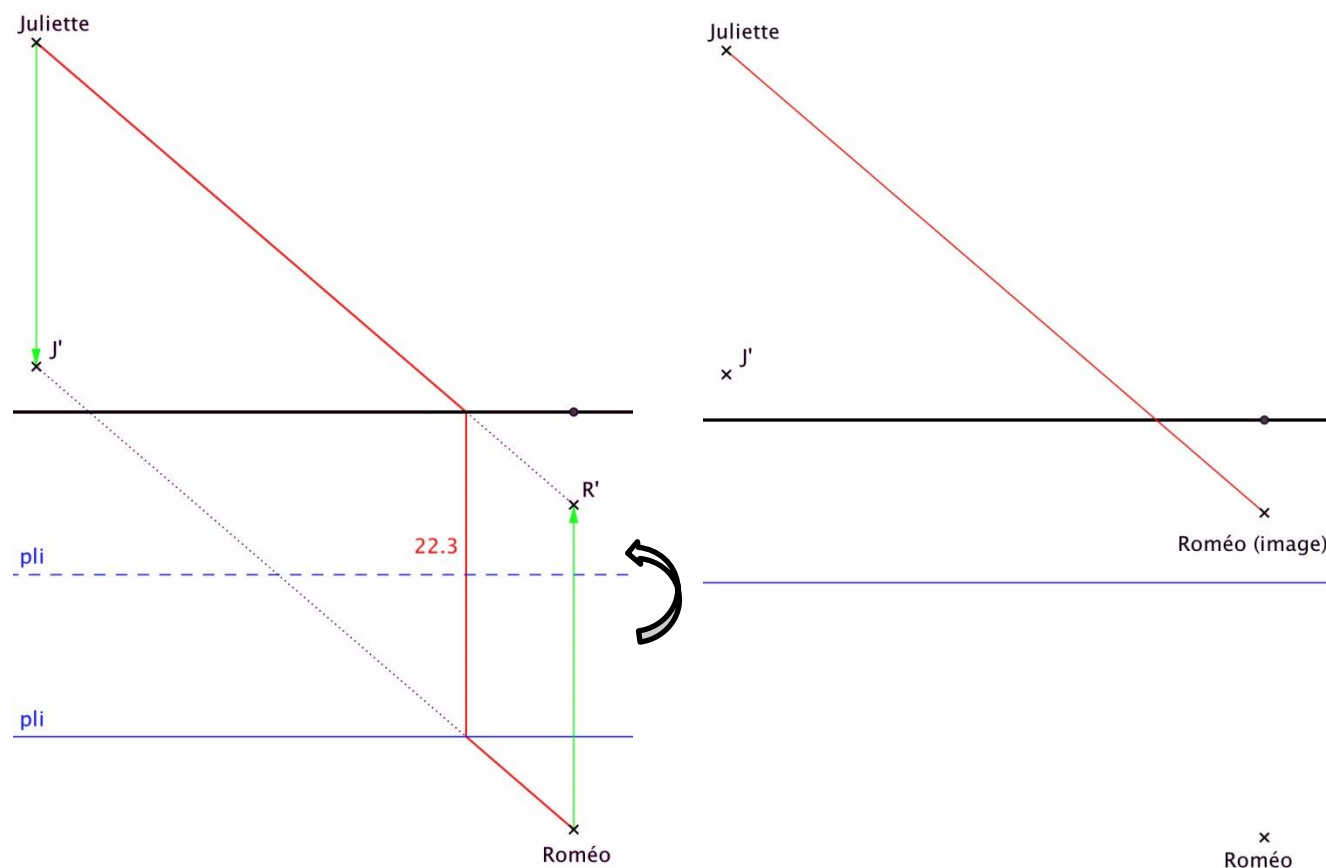


Ou bien,

- Effectuer le même raisonnement en construisant le point  $J'$  tel que  $JCDJ'$  soit un parallélogramme ; puis, en traçant  $J'R$ , on obtient le point  $D$ , intersection de  $(J'R)$  avec la berge la plus proche de  $R$ .

Ou

- Effectuer une translation du point  $J$  (ou du point  $R$ ) correspondant à la distance entre les berges, par construction ou par double pliage (voir schéma ci-dessous), afin de faire abstraction de la rivière et de ne prendre en compte que la partie « route » du trajet.
- Tracer le segment  $RJ'$  (ou  $JR'$ ) de manière à trouver à l'intersection l'une des deux extrémités du pont. Tracer enfin le pont demandé.



#### Attribution des points

- 4 Solution correcte avec construction d'un parallélogramme ou présence d'une translation (par construction ou par pliage) permettant de faire abstraction de la rivière, avec démarche détaillée, faisant apparaître la notion de distance minimale entre deux points et entre deux droites et montrant que le chemin construit est le plus court.
- 3 Solution correcte sans explication ou avec explication peu claire ou incomplète.
- 2 Présence d'au moins 4 essais avec pont perpendiculaire. Comparaisons des longueurs et choix d'une réponse cohérente avec les essais.
- 1 Tracé d'une route erronée, mais avec un pont perpendiculaire aux berges.
- 0 Incompréhension du problème (par exemple tracé de la route avec un pont non perpendiculaire aux berges).

## 14. LES DÉS – DIE WÜRFEL (Cat 81, 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

À partir d'une photo qui montre quatre dés particuliers empilés contre un mur, trouver le nombre de points noirs qui ne peuvent pas être vus par un observateur qui peut se déplacer.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que ces dés particuliers ont aussi 6 faces, avec de 1 à 6 points, mais que ces points ne sont pas disposés comme les dés habituels. Il faut donc imaginer ou dessiner ces dés pour comprendre la disposition des points par l'observation de la photo et par déduction trouver les faces avec les points cachés.
- Comprendre qu'il y a 3 faces non visibles pour le premier dé en bas à gauche, 5 pour le second dé en bas au centre, 3 pour le troisième dé en bas à droite et 2 pour le quatrième dé en haut.
- Pour compter les points noirs cachés on peut procéder de plusieurs manières.

a) Par exemple en trois temps :

- 1) Remarquer d'abord que **le dé du centre** cache tous ses points sauf le 2, il porte donc  $1 + 3 + 4 + 5 + 6 = 19$  points noirs invisibles.
- Puis on peut situer toutes les faces à 3 points et à 4 points sur les trois autres dés : face à 3 points sur le sol pour le dé de gauche, face à 4 points contre le mur pour le dé du dessus et face à 4 points contre le dé du centre pour le dé de droite, toutes invisibles ce qui fait  $3 + 4 + 4 = 11$  points noirs invisibles.
- Puis comprendre que **le dé de droite** cache les faces à 2 et 5 points contre le sol et le mur, soit 7 points noirs invisibles.
- 2) Situer ensuite la face à 1 point du dé de gauche. Remarquer pour cela que les dés de gauche et de droite présentent frontalement leurs faces à 6 points. Pour le dé de gauche, la face à 1 point ne peut être contre le mur, car la somme des points de ces faces opposées ne doit pas faire 7. Sa face à 1 point est donc visible à gauche ou invisible contre le dé du centre. Pour la situer, imaginer que l'on a planté deux vis au travers des dés de gauche et de droite, leurs têtes placées sur les faces à 6 points. En donnant un tour de vis au dé de droite, on voit la face à 1 point passer avant la face à 4 points. Le dé de gauche étant identique, pour obtenir la même chose, il faut que la face à 1 point soit collée contre le dé du centre et ne peut donc être la face visible que l'on ne voit pas sur la photo.
- 3) Il reste à trouver quelle est la face opposée à celle à 6 points. Imaginer à nouveau que l'on a planté deux vis au travers des dés du dessus et de droite, leurs têtes placées sur les faces à 3 points. En donnant un tour de vis au dé de droite, on voit la face à 1 point passer avant la face à 6 points. Pour obtenir la même chose avec le dé du dessus, il faut que la face à 1 point soit visible à gauche et la face à 6 points collée sur le dé du centre. En déduire que les faces opposées sont 6-2 et 1-5.
- **Le dé de gauche** cache donc les faces à 1 point et 2 points : 3 points noirs invisibles.
- **Le dé du dessus** ne cache pas sa face à 1 point, invisible sur la photo. Il cache donc sa face à 6 points collée contre le dé du centre.
- Conclure que le nombre des points qu'on ne peut pas voir est 46 ( $19 + 11 + 7 + 3 + 6$ ) dans la réalité.

b) Ou bien par différence :

- Comprendre qu'il suffit de déduire le nombre de points visibles du nombre de points contenus par l'ensemble des dés
- Calculer le nombre de points contenus par les 4 dés :  $4 \times (1+2+3+4+5+6) = 84$
- Orienter implicitement ou explicitement l'espace en définissant par exemple que les faces avant sont les faces visibles parallèles au mur.
- Comprendre que seulement deux faces visibles en réalité ne sont pas visibles sur la photo : les faces de droite des dés de gauche et de dessus.
- Comprendre que les dés habituels ne seront pas d'une grande utilité et que la situation nécessite une grande part de manipulation mentale.
- Pour le dé du dessus :
  - o Manipuler mentalement le dé de droite pour placer la face à 3 points dans le même plan et dans la même direction que la face 3 du dé du dessus ; sa face 1 est soit la face de gauche soit la face de droite.
  - o Déduire avec le dé du dessus que la face 5 est opposée à la face 1.
- Pour le dé de gauche :
  - o Manipuler mentalement le dé de droite pour placer la face 6 dans le même plan et la même direction que celle du dé de gauche et tel que la face 4 soit sur le dessus comme le dé de gauche : comme la face 3 est opposée à la face 4 la face 3 doit passer dessous et la face 1 doit passer en face de droite.
  - o Déduire que la face gauche du dé de gauche est la face 5
- Calculer la somme (**38**) des points visibles en réalité : (5 + 4 + 6) à gauche, 2 en bas au centre (6 + 1 + 3), à droite, (1 + 2 + 3 + 5) en haut.
- Calculer la somme des points non visibles en réalité :  $84 - 38 = 46$ .

- c) Ou bien, pour positionner le 2 et le 5 correctement, construire un développement du cube et observer l'orientation des points qui forment la face 6 (vertical/horizontal) et des points qui forment la face 3 (diagonale de gauche à droite ou de droite à gauche). En manipulant le dé obtenu observer que la face opposée au 1 est la face 5 et la face opposée au 6 est la face 2.
- Les faces non visibles du dé de gauche sont par conséquent, la face 3 opposée au 4, la face 1 et la face 2, pour un total de 6 points non visibles.
  - Pour le dé du haut, on sait que la face 4 est opposée à la face 3, et la face 6 n'est pas visible, 10 points ne sont donc pas visibles en tout.
  - Pour les deux autres dés, on raisonne par soustraction : le total des points d'un dé est 21. Pour le dé central en bas, on a  $21 - 2 = 19$ . Pour le dé de droite,  $21 - 10 = 11$ .
  - Le total des points noirs non visibles est donc :  $6 + 10 + 19 + 11 = 46$ .

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (46) avec des explications claires et complètes.
- 3 Réponse correcte (46) mais avec des explications incomplètes ou pas claires.  
Ou bien réponse 50, obtenue en permutant les positions du 1 et du 5 dans le dé en bas à gauche, avec des explications complètes  
Ou deux réponses (50 et 46) avec des explications complètes, dues à l'incapacité d'établir avec certitude combien il y a de points sur la face de gauche du dé en bas à gauche.
- 2 Réponse correcte sans explications,  
ou réponse 52 pour avoir aussi considéré comme invisibles les points sur les faces de gauche, du dé en haut ainsi que du dé en bas à gauche.
- 1 Réponse erronée due à des erreurs dans la détermination des points de trois faces cachées, ne tenant pas compte du 5 opposé à la face 1 et du 6 en face du 2,  
ou début de recherche cohérente.
- 0 Incompréhension du problème.

**15. LE POTAGER II – DER GEMÜSEGARTEN II** (Cat. 91, 10)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Diviser un triangle en trois triangles d'aires égales.

**Analyse de la tâche**

- Se rendre compte qu'il n'est pas possible de calculer l'aire du potager, car l'énoncé ne donne que les mesures de deux côtés du triangle ABC.
- Observer le triangle ABC du potager de Simone. Les aires des triangles BAE, AEF, FEC doivent être égales et en outre les aires de ACE et ACB doivent être respectivement le double et le triple de celles de chacun des trois triangles précédents.
- Remarquer que les triangles ABC et ABE ont la même hauteur par rapport aux côtés [BC] et [BE] et que l'aire de ABC doit être le triple de l'aire de ABE. En déduire que BE est le tiers de BC, mesure donc 8 m, et le pieu E doit être planté à 16 m de C.
- Maintenant observer que le triangle AEC doit avoir une aire double de celle du triangle FEC et que les deux triangles ont la même hauteur relative aux côtés [AC] et [FC]. En déduire que AC doit être le double de FC et donc le pieu F doit être planté à 9 m de C.

Ou :

- Tirer du dessin les mesures des hauteurs nécessaires pour calculer les aires et les bases respectives des trois triangles en obtenant ainsi des valeurs approchées.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (E à 16 m de C et F à 9 m de C) avec des explications claires et complètes (après avoir constaté que la hauteur est la même dans les deux couples de triangles considérés et avoir découvert la relation entre les aires et les bases des triangles ayant même hauteur, représentation graphique qui montre la hauteur commune).
- 3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires.
- 2 Réponse correcte sans explications,  
ou réponse correcte pour une seule des deux pieux.
- 1 Réponse approximative obtenue par des mesures sur le dessin.  
ou début de raisonnement correct avec une représentation graphique correcte.
- 0 Incompréhension du problème.

**16. BOÎTES DE CRAIES II – KREIDESCHACHTELN II (Cat. 91, 10)****ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Chercher un nombre  $n$  tel que divisé par le nombre de ses dizaines, le reste de la division soit égal à la moitié du diviseur.

**Analyse de la tâche**

- S'approprier la situation. Comprendre qu'il est question des dizaines d'un nombre et que celles-ci sont déterminées de manière unique. Comprendre quels sont les deux moments de la distribution aux  $x$  classes des  $n$  boîtes de craies achetées et que l'on a attribué à chaque classe le même nombre  $m$  de boîtes la première fois. En déduire que l'on a d'abord distribué  $mx$  boîtes de craies.
- Comprendre que distribuer  $n$  boîtes de craies entre  $x$  classes revient à diviser  $n$  par  $x$  et obtenir un reste non nul puisqu'il reste des boîtes après la première distribution (division euclidienne).
- Considérant ce reste et, en tenant compte du renseignement que si l'on distribue à chaque classe une demi boîte de craies, ils ne reste plus de craies, en déduire que le reste de la division de  $n$  par  $x$  est égal exactement à la moitié de  $x$ , d'où  $n = mx + x/2$ .
- En déduire que le nombre de classes  $x$  est un nombre pair (car c'est le double d'un autre nombre), qui varie de 2 à 18 parce que  $x$  est le nombre des dizaines de  $n$  et que diviser un nombre par ses dizaines donne un reste toujours plus petit ou égal à 9. Ainsi  $x$  ne peut pas être supérieurs à 18.
- Remarquer que le nombre  $x$  de classes est égal au nombre de dizaines du nombre  $n$  de boîtes de craie achetées. En déduire que chaque classe aura reçu au moins 10 boîtes de craies après la première distribution ( $m \geq 10$ ).
- Remarquer que le nombre  $x$  ne peut être 0 car l'école n'aurait pas de classes !
- Procéder par essais organisés en donnant successivement au nombre  $x$  de classes les valeurs : 2, 4, ... , 18, puis multiplier chaque valeur de  $x$  par un nombre  $m$  supérieur ou égal à 10 et ajouter la moitié de  $x$ . Ne conserver que les nombres dont les dizaines sont égales au nombre  $x$ . Obtenir ainsi tous les nombres  $n$  possibles que l'on peut présenter dans un tableau comme celui-ci :

$x$	2	2	2	2	2	4	4	6	6	8	10	12	14	16	18
$m$	10	11	12	13	14	10	11	10	11	10	10	10	10	10	10
$n = mx + x/2$	21	23	25	27	29	42	46	63	69	84	105	126	147	168	189

On peut observer que pour tous les nombres  $n$ , dont le nombre donné par le chiffre des unités est égal à la moitié du nombre des dizaines de  $n$ , cela va bien, mais ce ne sont pas les seuls. En effet on obtient ainsi seulement les nombres  $n$  de boîtes pour lesquels on attribue à chaque classe 10 boîtes et demi. Il faut aussi donner les nombres  $n$  qui attribuent à chaque classe plus de 10,5 boîtes : 23, 46, 69 (11,5 boîtes), 25 (12,5 boîtes), 27 (13,5 boîtes), 29 (14,5 boîtes). On ne peut pas aller au-delà de ce nombre de boîtes attribué à chaque classe, car les conditions du problème ne sont plus respectées.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (21; 23; 25; 27; 29; 42; 46; 63; 69; 84; 105; 126; 147; 168; 189) qui montre clairement le procédé suivi et souligne l'exhaustivité (ou l'impossibilité d'autres solutions).
- 3 Réponse correcte avec un procédé peu clair ou qui ne souligne pas l'exhaustivité.  
Ou donner seulement de 10 à 14 nombres corrects avec raisonnement clair ou essais apparents et sans réponse erronée.
- 2 De 10 à 14 nombres corrects avec raisonnement ou essais apparents et au plus quatre réponses erronées,  
Ou donner de 5 à 9 nombres corrects, avec raisonnement ou essais apparents et sans réponse erronée.
- 1 Début de recherche cohérente : donner de 2 à 4 nombres corrects.
- 0 Incompréhension du problème.

## 17. DES RACINES CARRÉES - QUADRATWURZELN (Cat. 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Dessiner un triangle dont les sommets sont placés sur des sommets des carrés d'un quadrillage 1cm x 1cm et dont les côtés mesurent  $\sqrt{41}$  cm,  $\sqrt{45}$  cm et  $\sqrt{68}$  cm.

#### Analyse de la tâche

- Réaliser que  $\sqrt{41}$ ,  $\sqrt{45}$  et  $\sqrt{68}$  ne sont pas des nombres entiers et que les côtés du triangle ne peuvent donc être ni horizontaux ni verticaux, puisqu'ils sont dessinés sur un quadrillage à mailles carrées.
- Penser ensuite au théorème de Pythagore et chercher des triangles rectangles dont les côtés sont portés par les lignes du quadrillage et dont les hypoténuses ont pour mesures les longueurs données.
- On peut alors être amené à chercher des carrés parfaits dont les sommes deux à deux donnent successivement 41, 45 et 68. Ce qui est relativement facile à trouver en considérant tous les carrés de 1 à 8 (puisque le carré de 9 dépasse 68) : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, et en les couplant pour trouver 41, 45 et 68.
- On a :  $41 = 16 + 25$ ,  $45 = 9 + 36$  et  $68 = 4 + 64$  (ces décompositions sont les seules possibles).
- Pour obtenir le triangle cherché, il faudra ensuite « juxtaposer » les trois triangles rectangles dont les hypoténuses ont pour longueurs  $\sqrt{41}$ ,  $\sqrt{45}$  et  $\sqrt{68}$  en centimètres. Le triangle est à imaginer dans un rectangle dont les deux côtés auront pour mesures 6 cm et 8 cm qui sont les plus grands côtés des trois triangles rectangles trouvés (fig. 1).

Ou bien, considérer des valeurs approchées au millimètre près des longueurs données pour les côtés en les traçant, par exemple, avec une règle et construire un triangle en faisant différents essais, de telle sorte que ses sommets coïncident avec les sommets des carrés du quadrillage ; ou encore, par exemple, dessiner un cercle centré en un point A du quadrillage (fig. 2) de rayon 6,4 cm ( $\sqrt{41} \approx 6,403$ ) et constater qu'il y a 8 points possibles sur le quadrillage (deux sur l'illustration) qui pourraient correspondre au segment cherché et le vérifier en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles ABD' et AB'C' obtenus.

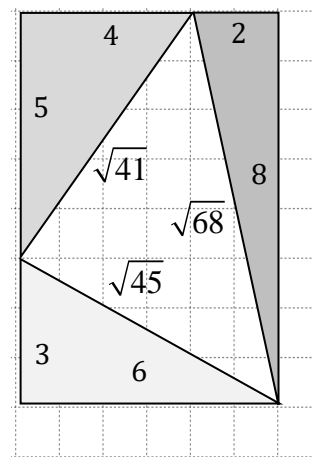


Figure 1

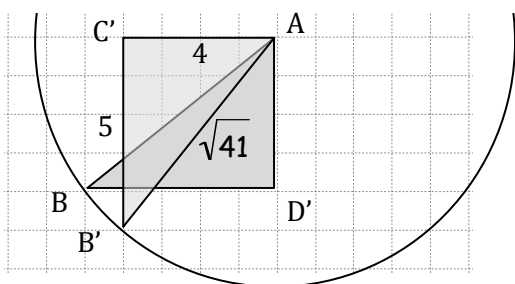


Figure 2

- Continuer ensuite la recherche avec la même stratégie en traçant un cercle de même centre A et de rayon 8,25 cm ( $\sqrt{68} \approx 8,246$ ) (Fig 3), obtenir un point C sur le quadrillage qui donne le deuxième côté du triangle AB'C de Boris, en vérifiant que la longueur B'C vaut  $\sqrt{45} \approx 6,7$  cm.

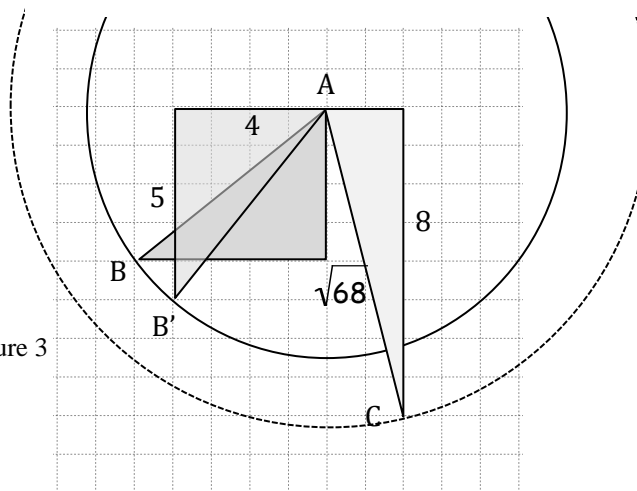


Figure 3

#### Attribution des points

- 4 Dessin correct du triangle demandé avec la vérification des 3 longueurs données, ou la description de sa construction.
- 3 Dessin correct du triangle demandé sans vérification ni la description de la procédure suivie, ou le dessin d'un triangle avec les sommets sur trois sommets du quadrillage et comme mesures des côtés des valeurs approchées au millimètre près des demandes, avec une description de la procédure suivie.

- 2 Dessin d'un triangle avec deux longueurs correspondant aux données (avec ou sans explications),  
ou dessin d'une ligne brisée contenant deux segments avec deux longueurs correspondant aux données.  
ou dessin de deux ou trois segments disjoints avec des longueurs correspondant aux données.
- 1 Dessin d'un triangle avec une longueur correspondant à une donnée.  
ou dessin d'un segment de longueur correspondant à l'une des longueurs recherchées.
- 0 Incompréhension du problème.

**18. LA GRILLE – DIE ZAHLENTABELLE (Cat. 91, 10)****ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer le nombre de cases d'une grille carrée, numérotées à partir de 1 en ordre croissant, de gauche à droite pour les lignes impaires et de droite à gauche pour les lignes paires, connaissant les nombres de deux cases sur deux lignes différentes, de la même colonne, dont on ne connaît pas la position.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre la règle de numérotation des cases à partir de l'exemple donné.
- Se rendre compte que la partie entière de  $140 / 6$  est 23 et donc que le carré cherché aura plus de 23 lignes et colonnes ; construire des carrés simplifiés, en indiquant par exemple les nombres dans les cases de début ou de fin de ligne...  
ou : en appelant  $n$  le nombre de lignes et de colonnes de la grille carrée, se rendre compte que pour que 140 soit dans la sixième ligne, il faut utiliser des inégalités du type  $5n+1 \leq 140 \leq 6n$ , ou, d'une manière analogue,  $5n \leq 139$  et  $140 \leq 6n$  et obtenir les trois possibilités pour  $n$  : 25, 26, 27.
- Contrôler dans laquelle des grilles  $n \times n$  avec  $n = 24, 25, 26, 27$  si les cases 140 et 225 sont dans la même colonne, par exemple en écrivant les nombres des sixième et neuvième lignes et découvrir qu'il s'agit de la grille  $26 \times 26$  dans laquelle 140 et 225 sont les deux en 17<sup>e</sup> position. Cette grille a donc 676 cases ( $= 26 \times 26$ ).

Ou

- Observer que la première ligne commence par 1, la deuxième par  $2n$ , (pour une grille de  $n \times n$ ) vu que l'on s'est déplacé de  $n$  nombres vers la droite et  $n$  nombres vers la gauche. Et ainsi on trouvera  $2n + 1$  au début de la troisième,  $4n$  pour la quatrième,  $4n + 1$  pour la cinquième,  $6n$  pour la sixième... Le nombre 140 de la sixième ligne se situe dans une colonne dont le numéro est inconnu. Puisque, dans les lignes paires, les nombres diminuent de 1 en 1 en passant d'une colonne à la suivante vers la droite :  $140 = 6n - x$ , où  $x$  est le nombre de cases dont on doit se déplacer vers la droite. Pour trouver le nombre 225 de la neuvième ligne qui commence par  $8n + 1$ , dans laquelle les nombres croissent de 1, il faut se déplacer vers la droite de  $x$  colonnes. Donc  $225 = 8n + 1 + x$ . On a ainsi les deux équations :  $6n - x = 140$  et  $8n + 1 + x = 225$  d'où, par comparaison, on déduit  $14n = 364$  d'où  $n = 26$ .

Ou

- Utiliser un tableur : faire des essais de grilles de dimensions différentes.

Ou sans passer par l'algèbre

- En observant la grille donnée, on remarque que pour calculer le premier terme de la quatrième ligne (colonne 1), on multiplie la dimension du carré (donc 5) par 4 et que les autres termes se calculent en ajoutant 1 en allant de gauche à droite. On en déduit que pour calculer ceux de la sixième ligne du carré cherché, on peut faire de même en multipliant par 6. De même pour la ligne 8, on multipliera par 8. On peut remarquer aussi que la somme des termes d'une même colonne des lignes 2 et 3 est égale à 21 (4 fois 5 plus 1), ceux des colonnes 4 et 5 à 41 (8 fois 5 plus 1). On peut déduire alors que la somme des termes de la ligne 8 et de la ligne 9 situés dans la même colonne est égale à 16 fois la dimension du carré cherché plus 1. Ce qui entraîne que la somme des termes 140 et 225 est égale à 14 fois (16 fois moins 2 fois, la différence entre les lignes 6 et 8) la dimension de ce carré plus 1. On a :  $140 + 225 = 365$  ;  $365 - 1 = 364$  ;  $364 : 14 = 26$ . La dimension du carré cherché est 26 et le nombre de case est 676.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (676 cases) avec explications claires de la procédure suivie (par essais après avoir déduit le champ d'investigation ou par voie algébrique ou par voie arithmétique).
- 3 Réponse correcte (676 cases) avec explications peu claires ou incomplètes,  
ou réponse 26 sans le calcul du nombre de cases de la grille et avec explications claires de la procédure suivie.
- 2 Réponse erronée due à quelques erreurs de calcul, avec des observations qui se rapportent au cas général,
- 1 Début de raisonnement qui montre la compréhension de la numérotation sur la grille, avec quelques essais numériques.
- 0 Incompréhension du problème.



## 19. LE GRAND LIVRE DES PROBLÈMES – DAS GROBE BUCH DER SACHAUFGABEN (Cat. 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver tous les couples de nombres consécutifs supérieurs à 1 et plus petits que 1000 tels qu'en faisant le produit des chiffres qui les composent, on obtienne un nombre donné (720).

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que l'on doit chercher les couples de nombres consécutifs (chaque couple donne les deux numéros des pages de gauche et de droite quand le livre est ouvert) ; que ces nombres sont supérieurs à 1 et plus petits que 1000 ; que les couples de nombres sont de la forme pair-impair (avec le nombre impair indiquant la page de droite dans le livre ouvert, en étant donc le suivant de celui de la page de gauche).
- Se rendre compte que dans les numéros cherchés il ne peut pas figurer le chiffre 0, parce qu'il annulerait le produit.
- Se rendre compte que la condition pour trouver les numéros des couples de pages fait intervenir les décompositions du nombre 720 en produit de facteurs d'un chiffre, pas nécessairement premiers, et qu'il peut être utile de partir de sa décomposition en facteurs premiers pour obtenir les autres ( $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ ).
- Observer que les couples de pages ne peuvent pas être numérotés avec des nombres à un chiffre parce que le produit serait au plus 72 ( $= 8 \times 9$ ), mais par des nombres de deux ou de trois chiffres.
- Comprendre qu'il faut chercher 4 ou 6 nombres différents de zéro, qui sont les facteurs d'une décomposition de 720. On peut toujours insérer 1 comme facteur, lui aussi diviseur de 720.
- Comprendre que dans les couples cherchés, les deux nombres ont les chiffres des dizaines égaux et éventuellement ceux des centaines égaux parce que ces nombres doivent être consécutifs.
- On peut procéder de plusieurs manières. Par exemple :  
se rendre compte que le 5, ne paraît qu'une seule fois dans la décomposition en facteurs premiers de 720, il doit donc occuper seulement la place des unités d'un des nombres qui constituent les couples cherchés, c'est-à-dire celui de la page de droite, parce qu'impair. L'autre numéro doit donc être le nombre précédent et donc finir par 4.
- Il reste à placer deux facteurs 3, deux facteurs 2 et éventuellement des facteurs 1. Trouver ainsi les couples (324, 325) et (234, 235). Puis remplacer les chiffres 2 et 3 par leur produit ce qui donne 64 et 65 et en utilisant le facteur 1, trouver aussi (164, 165) et (614, 615). (Dans le cas où par erreur on donnerait le 5 comme unité dans la page de gauche, les autres facteurs disponibles dans la décomposition de 720 ne permettraient pas d'utiliser le 6 pour les unités dans la page de droite).

Ou bien,

- Chercher d'abord de manière systématique les nombres consécutifs de deux chiffres avec le chiffre des unités impair, puis les nombres de trois chiffres toujours avec le chiffre des unités impair. Pour les nombres de deux chiffres, le 5 ne peut être placé comme dizaine, car pour aucun des couples de nombres consécutifs entre 52 et 59, le produit des chiffres donne 720. En outre, il faudrait deux fois le chiffre 5. Il faut donc chercher les couples de nombres de la forme ( $a4$ ,  $a5$ ) et le couple unique qui donne 720 comme produit des chiffres est (64, 65). Alors, on obtient tout de suite les deux couples de nombres de trois chiffres (164, 165) et (614, 615) dont les produits des chiffres est égal à 720, en multipliant par le facteur 1. Mais on obtient aussi les couples (234, 235) et (324, 325) en décomposant le 6 en  $2 \times 3$ .

Ou (de manière plus experte),

- On peut faciliter la recherche en utilisant la décomposition en facteurs premier de 720 ( $= 2^4 \times 3^2 \times 5$ ). Les quatre chiffres impairs et uniques qui peuvent être des unités sont 1, 3, 5, 9. On doit exclure le chiffre 1 parce que le nombre précédent est 0. On doit exclure le chiffre 3 parce que les couples de nombres de la forme ( $ab2$ ,  $ab3$ ) ne peuvent pas donner 720 comme produit des chiffres, car  $a2 \times b2 \times 6 = 720$  n'a pas solutions entières pour  $a$  et  $b$  ( $120$  n'est pas un carré parfait). Le chiffre 9 est à exclure pour le même motif ( $a2 \times b2 \times 72 = 720$  seulement si  $a2 \times b2 = 10$  !). Il ne reste que le chiffre 5 comme unité et  $a2 \times b2 \times 20 = 720$  a pour solution  $a \times b = 6$ . On trouve les couples de nombres déjà déterminés.

Ou (de manière plus pragmatique),

- On peut déduire que les chiffres des unités ne peuvent être que 4 et 5 car c'est le seul couple de chiffres dont le produit est un multiple de 10 (donc non nul). On a  $4 \times 5 = 20$ ,  $720 : 20 = 36$ . Le produit des chiffres des dizaines et des centaines qui composent les deux numéros est donc égal à 36. On pense normalement aux chiffres 6, seuls ou combinés avec 1 et aux chiffres 2 et 3 car le produit est égal à 6. Ce qui donne 6 (car  $6 \times 6 = 36$ ), 16 et 61 (car  $6 \times 1 \times 6 \times 1 = 36$ ), 23 (car  $2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$ ), 32 (pour la même raison). Les combinaisons des chiffres 2, 3, 1 et 4 ou 5 ne donneront pas un nombre inférieur à 1000.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte, les cinq couples possibles: (64, 65) ; (164, 165) ; (234, 235) ; (324, 325) ; (614, 615), avec explication claire et complète du procédé suivi qui montre l'exhaustivité.
- 3 Trois ou quatre couples corrects, avec des calculs qui montrent la recherche et la vérification des conditions données par le problème ;

ou bien deux couples corrects, mais avec une argumentation claire sur quelques aspects ponctuels, par exemple sur le rôle du chiffre 5, ou sur la présence de facteurs carrés dans la décomposition de 720,

ou bien cinq couples possibles, avec des explications insuffisantes.

- 2 Un ou deux couples de nombres corrects, avec des calculs qui montrent la recherche et la vérification des conditions données par le problème ;  
ou deux ou trois couples corrects sans explications ;  
ou deux couples corrects avec d'autres couples erronés, avec des explications.
- 1 Début de raisonnement correct, avec la compréhension du fait que le nombre 720 doit être le produit des chiffres de deux nombres consécutifs des numéros des pages. Accepter comme début de raisonnement des tentatives erronées, mais qui tiennent compte de ces considérations.
- 0 Incompréhension du problème.