

## 9. UN CHAMP D'AIRE DOUBLE (Cat. 71)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

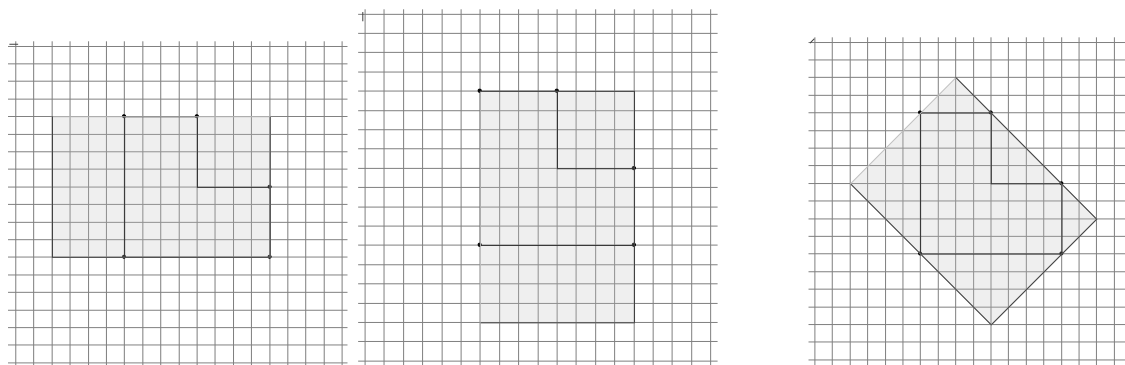
Transformer un polygone concave (composé d'un rectangle et d'un carré ou représentant les  $\frac{3}{4}$  d'un carré) sur le contour duquel sont placés cinq points en un rectangle d'aire double de façon à ce que les cinq points soient encore sur le contour du rectangle dans leur position d'origine.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que l'aire du nouveau champ, doit être le double de celle de l'ancien champ.
- Faire le choix d'une unité de mesure, le plus simple étant de prendre pour unité un carreau du quadrillage et déterminer l'aire de l'ancien champ : 48 et celle du nouveau : 96 (en carreaux).  
On peut aussi observer que la figure d'origine est composée de trois carrés de  $4 \times 4$  et que le nouvel enclos devra être composé de six carrés de  $4 \times 4$ , ce qui permet d'obtenir facilement les deux premières solutions (pour la troisième il faudra décomposer ce carré en triangles dont l'aire vaut  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{4}$  du carré.)
- Comprendre la contrainte de position des 5 arbres : ils restent là où ils sont et ils doivent être aussi sur la nouvelle clôture. Comme il y a 5 arbres, ils ne peuvent pas tous être sur les sommets du rectangle (comme ils étaient sur les sommets de la figure d'origine) mais donc sur des côtés du rectangle.
- Essayer de dessiner le nouveau champ en tenant compte des trois contraintes : il doit être rectangulaire et les points doivent être sur les côtés ou être des sommets du rectangle.

Deux cas se présentent :

- Les côtés du rectangle suivent les lignes du quadrillage. Utiliser alors la contrainte sur l'aire, 96, pour déterminer les dimensions du rectangle (8 et 12 s'imposent rapidement comme diviseurs de 96 et 8 comme une des dimensions de la figure d'origine)
- Les côtés du rectangle ne suivent pas les lignes du quadrillage. Procéder par essais pour tracer le seul rectangle qui satisfait la contrainte sur la position des points. Déterminer son aire et la comparer à l'aire de l'ancien champ. Ou la comparer à celle de la figure précédente par décomposition
- Conclure qu'il y a trois possibilités :



#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte avec dessin précis des trois rectangles possibles et vérification du doublement de l'aire, sans aucune figure erronée
- 3 Dessin précis des trois rectangles possibles sans vérification du doublement de l'aire  
ou dessin précis de deux rectangles corrects avec vérification du doublement de l'aire et sans aucune figure erronée  
ou dessin précis des trois rectangles corrects avec ou sans vérification du doublement de l'aire et avec présence d'une figure erronée (soit la figure n'est pas un rectangle, soit la position de tous les arbres sur le contour n'est pas respectée)
- 2 Dessin précis d'un seul rectangle correct avec ou sans vérification du doublement de l'aire et sans aucune figure erronée  
ou dessin précis de 2 rectangles corrects avec ou sans vérification du doublement de l'aire et avec présence d'une figure erronée
- 1 Dessin précis d'un seul rectangle correct avec ou sans vérification du doublement de l'aire et avec présence d'une figure erronée
- 0 Incompréhension du problème

**10. TOUT À MOINS DE 3 EUROS (Cat. 71, 81)****ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Dans un contexte de prix inférieurs à 3 euros, trouver toutes les paires de nombres décimaux (avec unités, dixièmes et centièmes) formés de trois mêmes chiffres, tous différents les uns des autres, et telles que la différence entre les deux nombres est 72 centièmes

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que tous les prix sont écrits avec des nombres décimaux formés de trois chiffres tous différents les uns des autres, ayant pour chiffre des unités un chiffre allant de 0 à 2, tandis que pour les dixièmes et les centièmes tous les chiffres de 0 à 9 peuvent être utilisés.
- Comprendre qu'il faut chercher des paires de nombres décimaux écrits avec trois mêmes chiffres, différents les uns des autres mais disposés de manière différente et telles que la différence entre les deux nombres est 72 centièmes.
- Vérifier, sur l'exemple que la différence entre 1,03 et 0,31 est bien de 72 centimes et que les trois chiffres sont distincts.
- Trouver d'autres paires en procédant par essais, qui peuvent s'organiser au cours de la recherche.

Dans le cas où le chiffre des unités est le même dans les deux prix, la recherche se limite à la partie décimale, composée de deux chiffres choisis dont la différence est 8 (7 + 1 de « retenue ») et que, par conséquent, ces deux chiffres peuvent être 1 et 9 ou 0 et 8, ce qui conduit aux quatre paires de prix : 1,08 et 1,80 ; 2,18 et 2,80 ; 0,19 et 0,91 ; 2,19 et 2,91, 0,18 et 0,80 comme 1,19 et 1,91 sont à écarter car elles n'utilisent pas trois chiffres différents

Dans le cas où le chiffre des unités est modifié par l'addition de 0,72 ou 1 – 0,28, il augmente de 1 d'un prix à l'autre il n'y a alors que deux possibilités à examiner pour les unités des deux prix : 0 et 1 puis 1 et 2. L'exemple donné 0,31 et 1,03 donne une première solution qui correspond au triplet de chiffres (0 ; 1 ; 3), avec le triplet de chiffres (1 ; 2 ; 4) on obtient encore les deux prix 1,42 et 2,14.

- Conclure qu'il y a six paires de prix répondant aux trois conditions, inférieurs à 3, différence de 0,72, chiffres distincts.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (les six paires 0,19 et 0,91 ; 2,19 et 2,91 ; 1,08 et 1,80 ; 2,08 et 2,80 ; 0,31 et 1,03 1,42 et 2,14) avec description des essais et mentionnant qu'il n'y a pas d'autres paires de prix (on admet que la paire 0,31 et 1,03 de l'exemple ne soit pas répétée.)
- 3 Réponse correcte (les six paires) mais avec une description peu claire de la procédure suivie et/ou ne précisant pas qu'il n'y a pas d'autres paires  
cinq paires correctes trouvées (ou quatre en excluant la paire de l'exemple), avec une description des essais ou les six paires correctes et les deux paires 0,08 et 0,80 1,19 et 1,91 avec chiffres non distincts
- 2 Quatre paires correctes (ou trois en excluant la paire de l'exemple), avec une description des essais  
ou quatre ou cinq paires nouvelles avec une ou deux paires incorrectes ne respectant pas une seule des trois conditions (écart différent de 0,72, prix supérieur à 3 €, chiffres non tous différents).
- 1 Seulement une ou deux paires trouvées, autre que celle donnée dans l'énoncé  
ou trois paires nouvelles avec une ou deux paires incorrectes (écart différent de 0,72, prix supérieur à 3 €, chiffres non tous différents).
- 0 Incompréhension du problème (contrainte sur les chiffres ou la différence non pris en compte)

## 11. LES BRACELETS DÉCORÉS (Cat. 71, 81)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Connaissant le prix de trois compositions différentes réalisées à l'aide de trois types d'objets ayant des prix différents l'un de l'autre, déterminer le prix d'une quatrième composition contenant les trois mêmes types d'objets.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que tous les bracelets sont réalisés avec trois types de pièces : carré, triangle et quart de disque, et donc que les losanges qu'on voit sur le troisième bracelet sont composés chacun de deux triangles isocèles accolés par leur base.
  - Comprendre que chaque type de pièce a un prix différent en fonction de la forme et que le prix indiqué à côté de chaque bracelet correspond au prix total des pièces utilisées.
  - Observer que le premier et le troisième bracelet comportent les trois types de pièces alors que le deuxième ne comporte pas de pièce triangulaire.
  - Comprendre que pour déterminer le prix du quatrième bracelet il faut connaître celui de chaque type de pièce.
  - Déterminer pour chaque bracelet le nombre de pièces de chaque type qui a été utilisé :
    - premier bracelet : 4 quarts de cercle, 4 carrés, 8 triangles ;
    - deuxième bracelet : 12 quarts de cercle, 10 carrés ;
    - troisième bracelet : 4 quarts de cercle, 5 carrés, 8 triangles
  - Constater que le troisième bracelet se distingue du premier uniquement par la présence d'une pièce carrée supplémentaire.
  - En déduire que la différence de prix entre les deux bracelets correspond au prix d'une pièce carré : 0,70 euro ( $13,90 - 13,20$ ).
  - Déterminer ensuite le prix d'un quart de disque à partir du prix du deuxième bracelet qui n'est composé que de carrés et quarts de disque : 0,80 euro ( $[16,60 - 0,70 \times 10] : 12$ ).
  - Déterminer enfin le prix d'une pièce triangulaire à partir du prix du premier ou du troisième bracelet. Par exemple à partir des informations maintenant connues sur le premier bracelet, on trouve 0,90 euro ( $[13,20 - 0,80 \times 4 - 0,70 \times 4] : 8$ ).
  - Calculer enfin le prix du quatrième bracelet : 17,60 euro ( $0,80 \times 4 - 0,70 \times 9 + 0,90 \times 9$ ).
- Ou Procéder par essais pour déterminer le prix de chaque type de pièce, par exemple à partir du deuxième bracelet qui n'est fait que de carrés et de quarts de disque, en nombres voisins (10 carrés et 12 quarts de disque). En faisant l'hypothèse que les deux types de pièces ont le même prix, on obtient 0,75 euro ( $16,60 : 22$ ). A partir de là, ajuster les valeurs. Pour les valeurs qui conviennent pour le deuxième bracelet, vérifier qu'elles conviennent pour les premier et troisième bracelets. Finir par trouver que pour 0,70 euro pour la pièce carrée et 0,80 euro pour le quart de disque, on obtient le même prix pour la pièce triangulaire (0,90 euro) pour les premier et troisième bracelets.
- Calculer le prix du quatrième bracelet : 17,60 euro.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (17,60 euro) avec des explications claires et complètes (inventaire des pièces de chaque bracelet ou comparaison directe entre le premier et le troisième bracelet, description des étapes avec le détail des calculs des valeurs des différentes pièces, essais organisés avec présence des vérifications effectuées)
- 3 Réponse correcte avec des explications partielles (par exemple absence de quelques étapes ou dans le cas d'une procédure par essais absence de vérifications)  
ou procédure correcte bien expliquée mais avec une erreur dans le comptage des pièces ou dans l'exécution d'une opération avec les nombres décimaux
- 2 Réponse correcte sans explication  
ou procédure correcte avec plus d'une erreur dans le comptage des pièces et/ou l'exécution des opérations avec les nombres décimaux  
ou détermination correcte du nombre de pièces de chaque type dans les trois premiers bracelets et début de procédure correcte des calculs mais sans arriver à la conclusion
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple, détermination exacte du nombre de pièces de chaque type dans les trois premiers bracelets)
- 0 Incompréhension du problème (par exemple décompte du nombre de pièces dans chaque bracelet, sans prendre en compte qu'il y a différents types de pièces, attribution de valeurs arbitraires aux pièces sans vérification ...)

## 12. COMPARAISON DE FIGURES (Cat. 71, 81)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Comparer les aires de trois polygones (de 5 à 6 côtés) dont tous les sommets sont sur des nœuds d'un quadrillage.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre, à la lecture de la question et à l'observation des figures que pour comparer les aires, il s'agit de déterminer chacune des trois aires, avec une unité commune.
  - Constater que les trois figures ne sont ni des rectangles, ni des triangles pour lesquels on dispose de formules, que la présence du quadrillage permet d'utiliser le carreau comme unité commune et qu'il faudra décomposer les figures en carreaux entiers ou parties de carreaux ou en figures de base : rectangles, triangles ou demi-rectangles.
  - Les procédures de détermination de l'aire sont multiples, et différentes d'une figure à l'autre et d'un groupe d'élèves à un autre, en particulier :
    - comptage une à une des unités entières, puis reconstitution d'unités par déplacements des parties non entières,
    - décomposition de la figure en rectangles et triangles qui peuvent reconstituer un rectangle par déplacements,
    - perception du triangle rectangle comme demi-rectangle,
    - les triangles non rectangles sans angle obtus sont décomposés en deux triangles rectangles,
    - calcul de l'aire du rectangle circonscrit à la figure totale suivi de la soustraction des aires des rectangles et/ou triangles complémentaires,
    - appel à la formule de l'aire du triangle.
  - Trouver l'aire des trois figures, en carreaux, par exemple :  
 Pour A : un rectangle de  $6 \times 7$  dont on retire quatre triangles de  $5 \times 1$ , de  $6 \times 1$ , de  $6 \times 3$  de  $5 \times 2$  et un rectangle de  $2 \times 1$  :  
 $42 - 2,5 - 3 - 9 - 5 - 2 = 20,5$ .  
 Pour B : un rectangle de  $6 \times 2$  et un triangle de  $6 \times 3$  :  $12 + 9 = 21$  ou compensations de carreaux pour le triangle  
 Pour C : décomposition en un rectangle et trois triangles.  $6 + 2 + 10 + 3 = 21$
  - Conclure que les trois aires ne sont pas égales : 20,5 ; 21 et 21 (en carrés du quadrillage).
- Ou, calcul des aires à partir de mesures prises, en cm ou mm, sur les polygones qui composent les figures. (Cette procédure exige des mesures prises au mm près, les calculs précis de chaque aire et la prise en compte rigoureuse des erreurs dues aux approximations pour être certain que l'aire de A est inférieure aux aires de B et C)

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte : les trois aires ne sont pas égales A : 20,5 ; B : 21 et C : 21 (en carreaux du quadrillage). On accepte que l'inégalité ne soit pas mentionnée explicitement ; mais pour chacune des aires la description des calculs ou comptages est nécessaire. (En cas de mesures en cm ou mm, l'inégalité ou l'égalité des aires doivent être accompagnés de calculs précis tenant compte explicitement des erreurs d'approximation.)
- 3 Réponse correcte, avec les trois aires trouvées, mais avec le détail des calculs seulement pour une ou deux d'entre elles ou aires correctes pour deux des aires et erreur sur la troisième, avec détail des calculs ou aires calculées d'après des mesures correctes au mm, sans mention explicite des erreurs dues aux approximations
- 2 Réponse correcte, avec les trois aires trouvées, sans le détail des calculs  
 ou aire correcte pour une seule des trois aires, et une seule erreur pour chacune des deux autres, chaque fois avec le détail des calculs  
 ou réponse correcte avec le calcul détaillé pour deux aires, mais le calcul de la troisième n'a pas été abordé ou contient des erreurs  
 ou réponse erronée (les aires des trois polygones sont égales) due à des erreurs de calcul dans la détermination de l'aire de A, avec le détail des opérations
- 1 Seulement l'aire d'une ou deux des trois figures est trouvée, sans détails  
 ou aires approximatives à partir de mesures prises sur les polygones qui composent les figures
- 0 Incompréhension du problème

### 13. QUI A CASSÉ LA VITRE ? (Cat. 71, 81, 91, 10)

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Déterminer le vrai et le faux dans quatre affirmations dont l'une seule est fausse, dans un contexte de « mensonges » et vérités

##### Analyse de la tâche

- Observer que Claude et David disent la même chose et que, par conséquent, ni l'un ni l'autre ne peut avoir menti parce qu'on aurait deux affirmations fausses. En déduire que celui qui a menti est soit André, soit Bruno :
- Supposer qu'André ment. Son affirmation conduirait à la conclusion que le coupable est Bruno, mais puisque Bruno devrait dire la vérité, il ne pourrait plus affirmer que le coupable est André ou David. Donc Bruno dirait un mensonge, ce qui contredit la donnée qu'un seul des quatre enfants ment.
- Conclure que c'est Bruno qui ment et que, par conséquent, la vitre a été cassée par Claude ou Bruno lui-même. De l'affirmation d'André, vraie, il s'ensuit que c'est Claude le coupable. (L'obstacle à surmonter est d'accepter l'idée que celui qui ment n'est pas forcément le coupable.)

L'observation que Claude et David ne peuvent pas avoir menti réduit les hypothèses sur deux personnes, la recherche du coupable exige des hypothèses sur chaque personnage : soit en le considérant comme celui qui ment, soit en le considérant comme le coupable. Par exemple, dans ce dernier cas : si André était le coupable toutes les affirmations seraient vraies, si c'était Bruno, il y aurait deux affirmations fausses (celles d'André et Bruno), si c'était Claude, il n'y aurait qu'une affirmation fausse (celle de Bruno) si c'était David, il y aurait deux affirmations fausses (celles de Claude et de David).

##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (Claude) avec des explications claires et complètes (l'affirmation fausse est découverte et toutes les déductions et essais nécessaires sont présents)
- 3 Réponse correcte avec une description du raisonnement incomplète (toutes les hypothèses ne sont pas vérifiées)
- 2 Réponse correcte avec une explication contenant des erreurs de raisonnement (par exemple confusion entre faux ou vrai pour une affirmation)  
ou réponse que ne détermine que le menteur (Bruno) et non le coupable
- 1 Début de raisonnement correct, mais non abouti (par exemple réponse « André » qui ne tient pas compte de la donnée « un seul d'entre eux a menti »).  
ou réponse correcte (Claude) sans aucune explication
- 0 Incompréhension du problème

## 14. LE GRILLON SAUTEUR (Cat. 71, 81, 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Calculer le premier terme d'une succession de 7 termes dont on connaît le dernier, dans laquelle, à partir du deuxième, un terme vaut respectivement  $1/2$  ;  $1/3$  ;  $1/4$  ;  $1/5$  ; ... de plus que le terme précédent.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de l'élévation de la barre : après chaque saut elle est montée respectivement d'un demi, d'un tiers, d'un quart, ... de la hauteur de la barre précédente.
- Se rendre compte, après 7 sauts, le grillon a passé la barre à 60 cm de hauteur et qu'on est en présence d'une suite de sept hauteurs dont on ne connaît que la dernière (60) et les règles de passage de l'une à l'autre.
- Trois procédures sont à envisager : par essais successifs à partir de valeurs hypothétiques de la barre initiale ; analyse de la situation au moyen d'un dessin qui met en évidence les différentes hauteurs de la barre ; partir de 60 et remonter dans le temps, étape par étape.
- Procéder par essais en faisant une hypothèse sur la hauteur du premier saut. Par exemple 10 et procéder selon les indications : ajouter à 10 la moitié de 10 (5), ce qui donne 15 ; ajouter à 15 le tiers de 15 (5), ce qui donne 20 ; etc. pour arriver à 40 après le septième saut. On arrive ainsi à une hauteur inférieure à 60, mais on peut se rendre compte que l'augmentation d'un saut à l'autre ne change pas (5). Puisque 40 est inférieur à 60, continuer les essais en choisissant un nombre de départ supérieur à 10 (avec 20 on arrive à 80, avec 14 et 16 on arrive à 56 et 64 ...) l'essai avec 15 aboutit à 60.

Ou, avec une représentation graphique, de préférence sur papier quadrillé, on met en évidence l'égalité des augmentations de  $1/2$ ,  $1/3$  ...  $1/7$ , qui valent aussi la moitié de la hauteur de la barre d'origine et montrent que la hauteur finale correspond à 8 fois la moitié de la hauteur du saut initial. Donc en divisant la hauteur finale par 8 on trouve la moitié de la hauteur du saut initial : 7,5. Conclure que la barre a été placée à 15 cm ( $=7,5 \times 2$ ) au début de la compétition.

Ou, partir de 60, qui est  $1/7$  de plus que les  $7/7$  de la hauteur précédente, c'est-à-dire  $8/7$ , calculer la valeur de  $1/7$  ( $60 : 8 = 7,5$ ) et de  $7/7$  ( $7 \times 7,5 = 52,5$ ) qui est la hauteur de la sixième barre, et ainsi de suite pour arriver successivement à 45 ; 37,5 ; 30 ; 22,5 et aboutir à 15.

Ou, par voie algébrique, en désignant par  $x$  la hauteur du premier saut, les hauteurs des sept sauts sont :

$$x ; x + 1/2 x = 3/2 x ; 3/2 x + 1/3 \cdot 3/2 x = 2x ; 2x + 1/4 \cdot 2x = 5/2 x ; 3x ; 7/2x \text{ et } 4x = 60 \Rightarrow x = 15$$

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (15 cm) avec explications claires et complètes (essais explicites avec le détail des calculs, dessin ou progression arithmétique dont la raison est la demi hauteur primitive, ou pose d'une équation et sa résolution)
- 3 Réponse correcte (15 cm) avec explications peu claires ou incomplètes (dessin approximatif, un seul essai non détaillé, ou procédure algébrique où il manque quelques passages, ...)  
ou réponse correcte avec seulement une vérification (sans mentionner d'essais, seulement avec la liste des sept hauteurs)  
ou réponse erronée due à une seule erreur de calcul, avec explications claires et complètes, comme pour « 4 points ».
- 2 Réponse correcte sans explication  
ou réponse erronée due à une ou deux erreurs de calcul avec explications peu claires ou incomplètes
- 1 Début de recherche cohérente (hauteurs de quelques barres ou quelques essais qui montrent la compréhension de la situation ...)
- 0 Incompréhension du problème

## 15. ROUES DENTÉES (Cat. 71, 81, 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

A partir d'une photo d'engrenages, déterminer les données numériques à mettre en relation et les utiliser pour trouver le nombre de tours de l'une pour que les trois roues se retrouvent dans la position de départ.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que le dessin présenté fournit les informations nécessaires pour résoudre le problème.
- Comprendre que si les roues ont des nombres de dents différents, le nombre de tours est différent de l'une à l'autre.
- Observer les trois roues et compter les nombres de dents de chacune
- Considérer le nombre de tours de chaque roue sans le confondre avec le nombre de dents.
- Imaginer un tour de la roue du milieu (10 dents), la petite (6 dents) fera un tour et 4 dents, la grande (14 dents) n'aura pas fait un tour mais il manquera encore 4 dents pour se trouver dans la position de départ.

Poursuivre en imaginant deux tours de la roue du milieu (20 dents) et contrôler la position des deux autres : la petite aura fait trois tours et deux dents, la grande un tour et six dents au-delà de la position de départ. Quand la roue du milieu aura fait trois tours (30 dents), la petite aura fait 5 tours et sera dans la position du départ mais pas la grande qui aura fait deux tours et deux dents.

On peut procéder de manière analogue soit par un dessin soit en utilisant les divisions successives (le reste représentant les dents qui vont au-delà des tours complets).

Ou, après avoir fait différentes « expérimentations » imaginaires des rotations des roues, se rendre compte qu'on peut passer au cadre numérique et faire appel aux multiples communs des nombres 6, 10 et 14, pour trouver que le plus petit d'entre eux est 210, correspondant aux nombres de tours respectifs de la plus grande à la plus petite roue : 15, 21, et 35.

Ou, pour surmonter la difficulté de tenir sous contrôle le mouvement des trois roues simultanément, on peut décomposer le problème : travailler sur la roue du milieu et la petite (3 tours de la roue du milieu ramènent à la position de départ) et puis sur la roue du milieu et la grande (7 tours de la roue du milieu ramènent les flèches en face l'une de l'autre, et 7 tours = 70 dents, 10 tours de la roue du milieu correspondent à 5 tours de la grande).

Il reste à ce moment la nécessité de considérer le plus petit multiple commun de 3 et 7 pour trouver que la situation de départ se retrouve après 21 tours de la roue du milieu.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (21 tours) avec des explications claires et complètes (toutes les étapes permettant d'arriver à la solution sont présents et cohérentes, si le procédé par ppmc est utilisé, il est expliqué)
- 3 Réponse correcte (21 tours) avec des explications partielles (les étapes ne sont pas complètes ou toutes cohérentes, l'utilisation du ppmc n'est pas explicite)  
ou réponse « 35 tours » pour la petite roue avec des explications complètes  
ou réponse « 15 tours » pour la grande roue avec des explications complètes  
ou réponse erronée due à une seule erreur de comptage ou de calcul avec des explications complètes
- 2 Réponse correcte (21 tours) sans explication ni justification  
ou réponse erronée due à plusieurs erreurs de comptage ou de calcul avec des explications complètes  
ou réponse du type « multiple de 21 » (aussi 210, confusions entre nombre de tours et de dents) avec explications
- 1 Début de recherche cohérente
- 0 Incompréhension du problème

## 16. DODÉCAÈDRE (Cat 71, 81, 91, 10)

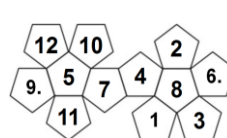
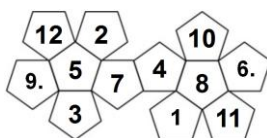
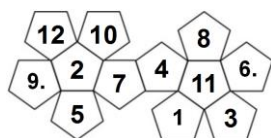
### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Placer les nombres de 1 à 12 sur les pentagones du développement d'un dodécaèdre de sorte que lorsque le dodécaèdre est construit, la somme des nombres placés sur des faces opposées soit toujours la même et que deux nombres consécutifs ne soient jamais placés sur deux faces adjacentes.

#### Analyse de la tâche

- Déterminer, sur le développement, les faces du dodécaèdre qui sont opposées à 1, 6 et 9, puis les autres paires de faces opposées et aussi les faces qui se touchent.
- Déterminer, que la somme de deux faces opposées est 13, et que : 1 et 12 ; 2 et 11 ; 3 et 10 ; 4 et 9, 5 et 8 ; 6 et 7 sont opposées et marquer les faces 12, 4 et 7 déjà désignées, comme opposées aux faces 1, 9 et 6.
- S'apercevoir que pour les trois paires de faces restantes, il y a plusieurs possibilités qui respectant la deuxième contrainte sur les faces adjacentes.
- Eliminer les nombres à exclure pour les faces déjà notées et procéder par essais et vérifications.  
Par exemple à droite du 9 et du 12, ne peuvent être essayés que les nombres 2, 3, 5 (8, 10 et 11 étant éliminés comme voisins) qui correspondraient aux placements respectifs de 11, 10, et 8 sur la face à droite du 4.  
En essayant 2 (et 11), il n'y a plus qu'une place pour 3, au-dessous de 11 et 6 et une seule pour 5 (sous le 2).  
En essayant 3, on arrive à une impasse.  
En essayant 5, on trouve deux dispositions.



- Vérifier que les solutions trouvées respectent tous les critères et sont bien différentes.

#### Attribution des points

- 4 Les 3 solutions correctes sont données, sans solution supplémentaire erronée ni doublons avec des explications claires de la procédure suivie (somme 13, placement de 12, 7 et 4, mention des essais, reconnaissance de l'exhaustivité, ...)
- 3 Les 3 solutions correctes sont données, sans solution supplémentaire erronée ni doublons, avec explications très partielles (on a fait des essais, ...)  
ou 2 solutions correctes sont données, sans solution supplémentaire erronée, avec explications claires
- 2 Les 3 solutions correctes sont données mais sans aucune explication  
ou 2 solutions correctes sont données, sans solution supplémentaire erronée, avec explications très partielles  
ou 2 solutions correctes avec explications, mais avec une solution erronée ou un doublon  
ou 1 solution correcte, sans solution supplémentaire erronée et avec explications claires
- 1 1 solution correcte mais sans aucune explication ou avec explications peu claires  
ou 1 solution incomplète (au minimum les nombres 4, 7 et 12 sont correctement placés) avec explications très partielles
- 0 Incompréhension du problème



## 17. VOILE TRIANGULAIRE (Cat. 91, 10)

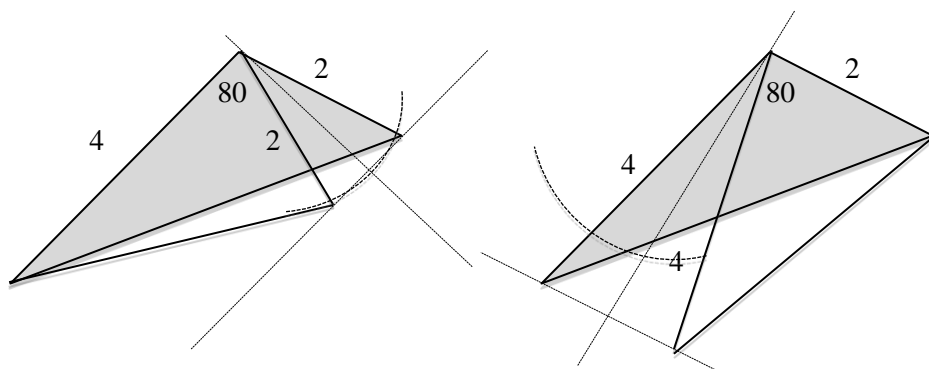
### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

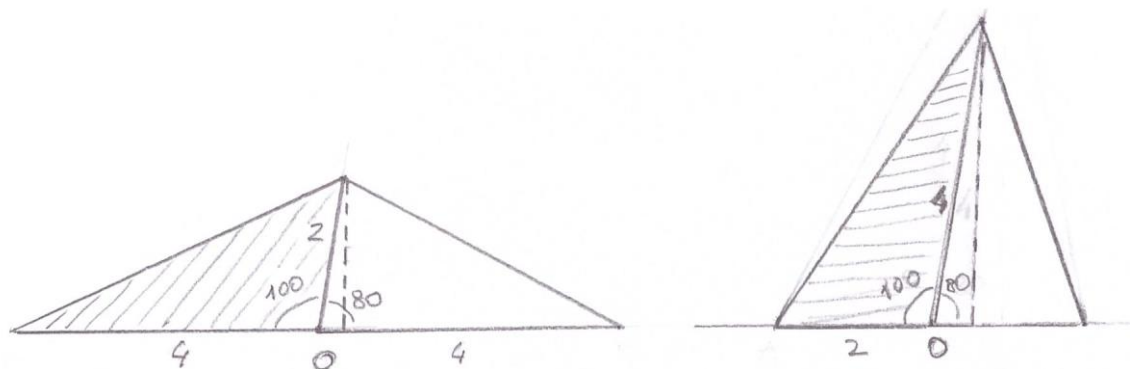
Etant donné un triangle dont deux côtés mesurent 2 m et 4 m (avec l'angle compris entre les deux côtés de 100 degrés), dessiner un triangle différent, de même aire avec deux côtés de 2 m et 4 m, et justifier qu'il est unique.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a toute une famille de triangles dont deux côtés mesurent (en m) 2 et 4, avec des angles différents formés par ces deux côtés (de 0 à 180 degrés), dont les aires varient selon l'angle (de 0 à 4 en m<sup>2</sup>)
- Comprendre que le dessin correspond à un choix de l'angle formé par les des deux côtés donnés (100 degrés) et qu'il détermine ainsi l'aire du triangle.
- Choisir l'un des côtés correspondants aux 2 m et 4 m sur la figure pour «base».
- Construire la parallèle à la base choisie (par exemple 4) passant par le sommet opposé et dessiner le nouveau sommet par une symétrie selon un axe perpendiculaire à la base (ou par une rotation). Puisque les deux triangles ont la même base et la même hauteur, ils ont donc la même aire, l'un avec un angle de 100 degrés, l'autre avec un angle de 80 degrés.
- La construction doit alors se répéter en choisissant l'autre base pour s'assurer que le nouveau triangle est le même dans les deux construction (angle de 80 degrés et côtés adjacents de 2 et 4).
- La figure ci-dessous représente les deux constructions : à gauche avec le choix de la « base 4 », à droite avec le choix de la « base 2 »
- En conclure que dans chacun des deux cas, on obtient un nouveau triangle dont l'angle formé par les deux côtés de 2m et 4m mesure 80 degrés et que (en vertu d'un des cas d'égalité des triangles), les deux constructions aboutissent au même triangle, c'est à dire qu'il n'y a qu'un modèle possible pour la voile de Jacques.



Ou, par une construction de ce type où l'on précise que les deux nouveaux triangles sont égaux : deux côtés de 2 et 4 m et l'angle compris de 80 degrés.



Ou, calculer une approximation de l'aire du triangle par mesures sur le dessin d'un de ses côtés et de sa hauteur correspondante, puis recherche d'autres triangles de même aire par essais successifs, en modifiant l'angle, ...

**Attribution des points**

- 4 Dessin correct du triangle aux trois angles aigus (dont un de 80 degrés) avec explications qui mentionnent que la hauteur a été conservée, que par conséquent l'aire est aussi conservée, avec les deux constructions (l'une de base 2 et l'autre de base 4) et la vérification qu'ils sont isométriques (mêmes angles et mêmes côtés)
- 3 Dessin correct d'un triangle aux trois angles aigus avec explications qui ne mentionne que la conservation de l'aire (sans penser à la construction à partir de l'autre « base », ni justification  
ou les deux constructions sont effectuées mais l'égalité des triangles non justifiée
- 2 Dessin correct d'un triangle aux trois angles aigus, sans explications
- 1 Ou début de recherche cohérente (mesures prises sur le dessin pour tenter de calculer l'aire du triangle et ses différentes hauteurs, tentatives de construction d'autres triangles de 2 et 4 m de côté dont l'angle compris est différent de 80 degrés ou n'est pas déterminé, ...)
- 0 Incompréhension du problème

## 18. NOMBRES PARTICULIERS (Cat. 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer les nombres entiers de trois chiffres tels que, en remplaçant le chiffre des dizaines par une virgule, on obtient un résultat qui est la 90<sup>e</sup> partie du nombre.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : en substituant le chiffre des dizaines d'un nombre naturel de trois chiffres, on obtient un nouveau nombre qui, multiplié par 90 donne le nombre de départ.
  - Comprendre que la procédure par essais de division ou de multiplication par 90 est longue et ne va pas permettre de trouver toutes les solutions.
  - Remarquer que le nombre obtenu après la substitution a un seul chiffre après la virgule et que, pour revenir au nombre de départ il faut le multiplier par 90, c'est-à-dire par 10 et par 9. Après la multiplication par 10 le nombre décimal deviendra un nombre entier, puis après la multiplication par 9 il deviendra un multiple de 9 – le nombre de départ - dont le chiffre des unités est le même que celui des dixièmes du nombre décimal.
  - Constater que le chiffre des unités, devenu dixièmes, ne peut être 0 car, sinon, le nombre substitué serait entier et égal à celui des centaines du nombre d'origine : le produit d'un nombre par 90 ne peut être égal à son produit par 100. Même constatation pour le chiffre des centaines du nombre d'origine qui est un « nombre entier de trois chiffres ».
  - Remarquer que 5 est le seul chiffre des unités qui se retrouve dans ses multiples de 9. Par conséquent le dernier chiffre des deux nombres est 5. Il suffit d'essayer avec les dix nombres d'un chiffre des unités et d'un chiffre des dixièmes : 1,5 ; 2,5 ; 3,5 ; ... ; 9,5, de les multiplier par 90 et de constater que seuls les quatre premiers essais sont acceptables : 135 ; 225 ; 315 ; 405 les suivants ne remplissent pas les conditions 495 pour 5,5, etc.
- Ou, partir de la recherche des nombres de Marthe comme multiples de 90 des nombres de Stéphane, donc des multiples entiers de 9 et limiter les essais aux nombres 108 117 126 **135** (=15×9) ...207 216 **225** (= 25 × 9) ... 307 316 **315** (= 35 × 9) ... **405** (= 45 × 9) et constater qu'il n'y en a plus après 500. (Lorsque le premier est trouvé, 135, on peut y ajouter 90 successivement pour trouver les autres).
- Ou, par voie algébrique, les deux nombres peuvent s'écrire :  $100x + 10y + z$  et  $x + z/10$ . De la condition  $(x + z/10) \times 90 = 100x + 10y + z$  on tire  $10(x + y) = 8z$ , puis  $5(x + y) = 4z$ , dont l'unique solution est  $z = 5$  et  $(x + y) = 4$ , car  $z$  représente un chiffre ( $0 \leq z \leq 9$ ), et les valeurs de  $x$  et  $y$  (sachant que  $x$  ne peut être 0) sont dans l'ordre : 1 et 3; 2 et 2; 3 et 1; 4 et 0. Les nombres que peut avoir écrits Marthe sont donc  $100 \times 1 + 10 \times 3 + 5 = 135$ ;  $100 \times 2 + 10 \times 2 + 5 = 225$ ;  $100 \times 3 + 10 \times 1 + 5 = 315$ ;  $100 \times 4 + 10 \times 0 + 5 = 405$ .
- Cette procédure, comme les précédentes, permet d'assurer l'exhaustivité.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte et complète (135; 225; 315; 405) avec explications claires et complètes qui assurent l'exhaustivité (en cas de procédure par essais, il faut vérifier aussi les nombres décimaux dont l'unité est 5, 6, 7, 8 et 9 ou les nombres de trois chiffres supérieurs à 405)
- 3 Deux ou trois nombres sont trouvés avec explication claire et complète (sans exhaustivité)  
ou seulement les nombres de Stéphane (1,5; 2,5; 3,5; 4,5) avec explication et exhaustivité  
ou les quatre nombres avec explication incomplète ou peu claire (absence de quelques passages et/ou sans exhaustivité)
- 2 un seul nombre est trouvé, avec explications ou vérification  
ou deux ou trois nombres avec explications incomplètes ou peu claires  
ou les quatre nombres de Stéphane sans explications mais avec vérification
- 1 Un seul nombre correct de Marthe ou Stéphane avec ou sans explications  
ou essais cohérents avec l'énoncé mais sans avoir trouvé aucun nombre correct
- 0 Incompréhension du problème

## 19. LES POTS DE CHOCOLAT (Cat. 91, 10)

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Confronter les niveaux de liquide dans deux récipients cylindriques connaissant le rythme de remplissage de chacun

#### Analyse de la tâche

- Calculer le temps nécessaire pour que le niveau du pot de la machine A arrive à une hauteur de 40 cm : il reste donc à remplir une hauteur de 30 cm et, en remplissant 1 cm par seconde, il faudra 30 secondes pour finir de remplir le pot A.
- Calculer la hauteur du niveau de chocolat dans le pot de la machine B après 30 secondes :  $(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 30)$  mm, en effectuant l'addition à la main ou en reconnaissant qu'il s'agit de  $(31 \times 30) / 2 = 465$  en mm ou 46,5 cm.  
Conclure qu'en 30 secondes le niveau de chocolat du pot de la machine B dépasserait le niveau de celui de la machine A et que, par conséquent, il rejoindrait le niveau du pot A avant que celui-ci ne soit plein.

Ou, calculer les hauteurs des niveaux de chocolat dans les deux pots en fonction du temps, en s'aidant éventuellement d'un tableau de ce genre :

temps (sec)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	25	26	27	28	29	30
hauteur A (cm)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...	35	36	37	38	39	40
hauteur B (cm)	0	0,1	0,3	0,6	1	1,5	2,1	2,8	3,6	...	32,5	35,1	37,8	40,6	43,5	46,5

- Conclure que le niveau de chocolat dans le pot de la machine B rejoindra celui du pot de la machine A après environ 27 secondes, c'est-à-dire avant que celui-ci ne soit plein.

Ou : par voie algébriques et/ou graphique déterminer soit le moment où le niveau de 400 mm est atteint dans le pot B soit le moment où les deux pots sont au même niveau :

il faut alors, dans le premier cas la (durée :  $t$ , en secondes) trouver la formule  $1 + 2 + 3 + \dots + t = (t+1) \times t/2$  et résoudre

l'équation  $(t+1) \times t/2 = 400$ . dont la solution est  $= \frac{-1 \pm \sqrt{1+3200}}{2} \approx 27,8$ , puis conclure que le niveau de chocolat dans le pot de la machine B arrivera à la hauteur 40 cm (400 mm) avant celui de la machine A (en 30 secondes) ; ou, dans le second cas, exprimer les deux fonctions  $f(t) = 10 + t$  ;  $g(t) = (t+1) \times t/20$  et résoudre l'équation  $f(t) = g(t)$  ;  $10 + t = (t+1) \times t/20$  dont la racine positive est égale à 26,53 s.

#### Attribution des points

- Réponse correcte : oui, le niveau de chocolat dans le pot de la machine B rejoindra celui du pot de la machine A avant que les pots soient pleins, avec explications claires et complètes (calcul du temps nécessaire pour arriver à 40 cm dans le pot B ou calcul de la hauteur de chocolat en fonction du temps) ou comparaison graphique ou calcul de l'instant où les deux pots auront la même hauteur de chocolat).
- Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires (la somme  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 30$  n'est pas explicitée ou quelques étapes de l'élaboration de l'équation sont omises)
- Procédure correcte mais avec erreur (de calcul ou de l'élaboration de l'équation ou de sa résolution)  
ou réponse erronée due à une erreur de calcul, mais avec une procédure correcte et bien expliquée
- Réponse correcte sans explication  
ou début de raisonnement correct (le nombre de secondes nécessaire pour remplir le pot de la machine A ou traces de la somme  $1 + 2 + 3 + 4 \dots$  ou seulement le début d'un tableau pour B)  
ou réponse erronée due à deux erreurs de calcul ou plus, avec procédure correcte
- Incompréhension du problème