

**ANALYSE DES PROBLÈMES**

---

**1. EISBECHER UNTER FREUNDEN - UNE COUPE DE GLACES AVEC DES AMIS (Kat. 31)****ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer le nombre de combinaisons avec répétition de 2 objets pris 4 par 4 (4 boules de glaces et deux parfums)

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que chaque coupe de glaces peut être composée seulement de fraise ou seulement de chocolat ou des deux parfums ensemble.
- Représenter la situation avec un schéma ou avec un dessin : il y a deux coupes formées d'un seul parfum (F-F-F-F et C-C-C-C), une coupe formée de deux boules au chocolat et deux boules à la fraise (C-C-F-F) et deux coupes formées de trois boules de glaces d'un parfum et une boule de l'autre (C-C-C-F et F-F-F-C).
- Comprendre que la « position » du parfum ne change pas le type de coupe de glaces, par exemple C-F-C-C et C-C-F-C représentent la même coupe.
- En déduire qu'il y a seulement cinq coupes de glaces possibles : F-F-F-F ; C-C-C-C ; C-F-F-F ; F-C-C-C ; F-F-C-C et que les six amis ne pourront pas tous avoir une coupe différente.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (« Non ») avec une liste ou un dessin des cinq types de coupes de glaces différentes
- 3 Réponse « Oui » due à une répétition, mais avec une liste ou un dessin corrects des cinq différentes compositions de coupes glacées  
ou réponse « Non », car seulement quatre compositions différentes de coupes glacées sont données, sans répétitions
- 2 Réponse fausse « Oui » (ou sans réponse) due à la présence de deux répétitions, mais avec une liste ou un dessin correct des cinq différentes compositions de coupes glacées  
ou réponse « Non » (ou sans réponse), motivée par le fait que seulement quatre compositions différentes de coupes glacées sont identifiées, avec en plus une répétition
- 1 Début de recherche cohérente : trois types différents de coupes de glaces sont donnés avec ou sans répétitions
- 0 Incompréhension du problème ou réponse « Non » sans aucune trace de recherche

**ANALYSE DES PROBLÈMES****2. EMMANUELLE, LUC UND IHRE STEMPEL - LES TAMPONS D'EMMANUELLE ET DE LUC**  
(Kat. 31, 32)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer et compter tous les nombres à un ou deux chiffres, de 0 à 99, qui s'écrivent en employant seulement les chiffres « pairs » ou seulement les chiffres « impairs ».

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il n'est pas possible partager les cent nombres en deux parties parce qu'il ne s'agit pas de rechercher les nombres pairs et les nombres impairs (les nombres écrits avec deux chiffres, l'un pair et l'autre impair ne peuvent être imprimés ni par Luc ni par Emmanuelle).
- Comprendre que pour imprimer les nombres inférieurs à 10 il suffit d'un seul tampon, alors que pour les nombres de 10 à 99, il faut utiliser deux tampons.
- Écrire la liste de tous les nombres de 0 à 99, mettre en évidence de manière différente les nombres d'Emmanuelle et ceux de Luc, et procéder aux comptages de chaque partie.

Ou bien,

- écrire et compter séparément les nombres d'Emmanuelle et de Luc : il y en a 5 pour les nombres d'Emmanuelle formés d'un seul chiffre (0, 2, 4, 6, 8) et 5 pour ceux de Luc (1, 3, 5, 7, 9). Par contre pour les nombres à deux chiffres il y en a 25 pour Luc (11.13.15.17.19 ; 31.33.35.37.39 ; 51.53.55.57.59 ; 71.73.75.77.79 ; 91.93.95.97.99) et 20 pour Emmanuelle (20.22.24.26.28 ; 40.42.44.46.48 ; 60.62.64.66.68 ; 80.82.84.86.88), parce que tous les chiffres impairs peuvent occuper la place des dizaines ou celle des unités, alors que pour les chiffres pairs, le zéro ne peut occuper que la place des unités.

Ou bien (avec un comptage de type combinatoire),

- après une première phase de recherche, se rendre compte, éventuellement en recourant à une représentation graphique, qu'on peut former tous les nombres à deux chiffres de Luc en combinant les cinq possibilités pour les chiffres des dizaines avec les cinq possibilités pour les chiffres des unités et compter ainsi  $25 = 5 \times 5$  nombres ; alors qu'en procédant de la même manière avec les chiffres pairs pour former les nombres d'Emmanuelle, on doit exclure les cinq nombres qui ont 0 comme dizaines, on obtient donc  $20 = 4 \times 5$  nombres. Considérer ensuite les 5 nombres à un chiffre de Luc et d'Emmanuelle.
- Conclure qu'il y a 25 nombres possibles pour Emmanuelle, et 30 pour Luc.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (25 pour Emmanuelle et 30 pour Luc) avec description claire de la procédure utilisée, qui peut être simplement la liste complète des nombres de chacun
- 3 Réponse correcte avec une description incomplète de la procédure utilisée (dans la détermination ou dans la liste des nombres ou dans la procédure de calcul suivie, ...)  
ou bien réponse avec une erreur de comptage mais avec une description claire de la procédure suivie
- 2 Réponse correcte sans aucune description de la procédure utilisée  
ou bien seulement un des deux nombres demandés est indiqué correctement et absence ou erreur pour l'autre, avec détail de la procédure utilisée
- 1 Début de raisonnement correct  
ou réponse correcte pour seulement un nombre sans description de la procédure utilisée
- 0 Incompréhension du problème

**ANALYSE DES PROBLÈMES****3. ISIDOR UND DIE NATÜRLICHEN ZAHLEN ! - ISIDORE ET LE FEUILLETON DES ENTIERS !**  
(Kat. 31, 32)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Dans l'écriture de la suite des entiers naturels à partir de 101, déterminer quel est le nombre dans lequel le chiffre 2 apparaît pour la 25<sup>e</sup> fois.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il faut compter combien de fois le chiffre 2 apparaît dans la suite des entiers à partir de 101, quelle que soit la position à laquelle se trouve ce chiffre 2 : chiffre des unités ou des dizaines ou des centaines.
  - Comprendre, à partir de l'exemple, qu'une seule centaine ne sera pas suffisante pour compter 25 fois le chiffre 2.
  - Écrire la suite complète des entiers à partir de 101 en ne comptant que le chiffre 2, jusqu'à arriver à la 25<sup>e</sup> fois.
- Ou bien,
- écrire seulement les entiers strictement supérieurs à 100 contenant le chiffre 2 en une position quelconque.
- Ou bien,
- procéder de façon organisée : de 101 à 199, le chiffre 2 apparaît 10 fois comme chiffre des unités et 10 fois comme chiffre des dizaines de 120 à 129, pour un total de 20 fois. Il manque donc 5 occurrences du chiffre 2 qui se trouve dans les entiers suivants : 200, 201, 202, 203.
  - Conclure que le nombre dans lequel apparaît pour la 25<sup>e</sup> fois le chiffre 2 est 203.
- Ou bien,
- déduire de la première information que l'on écrira 20 fois le chiffre 2 pour écrire les entiers de 101 à 199. Écrire ensuite les entiers 200, 201, 202, 203 pour trouver les cinq occurrences manquantes du chiffre 2.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (203) avec une description claire de la recherche effectuée ou une explication du raisonnement
- 3 Réponse correcte avec une description peu claire de la recherche
- 2 Réponse avec une ou deux erreurs dans le décompte, avec une présentation claire de la recherche ou début de la recherche organisée commencée avec au moins 20 fois le chiffre 2, mais la suite n'est pas complète ou bien réponse correcte sans aucune autre indication
- 1 Début d'un raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

## ANALYSE DES PROBLÈMES

## 4. QUADRATE IN DER FIGUR - DES CARRÉS SUR UNE FIGURE (Kat. 31, 32)

## ANALYSE A PRIORI

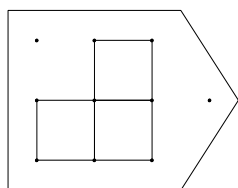
## Tâche mathématique

Trouver tous les carrés dont les sommets sont sur quatre points d'un réseau donné, à l'intérieur d'une figure donnée.

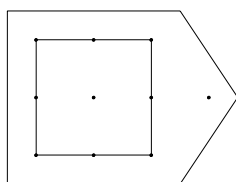
## Analyse de la tâche

- Comprendre que seuls les points à l'intérieur de la figure peuvent être des sommets des carrés à construire
- Choisir parmi tous les quadrilatères qu'on peut former, ceux qui ont les quatre côtés de la même longueur et deux angles droits. On obtient ainsi les carrés cherchés.
- Constater qu'on peut construire :

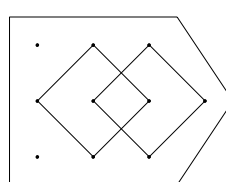
3 autres petits carrés



1 grand carré



2 carrés « obliques »



## Attribution des points

- 4 Les 6 carrés correctement dessinés et bien situés sans figure erronée ou bien les sept carrés avec la répétition de celui donné au départ
- 3 5 carrés correctement dessinés et bien situés, ou bien six carrés avec la répétition de celui donné au départ ou bien 6 ou 7 carrés correctement dessinés et bien situés mais avec une figure erronée ou bien 6 ou 7 carrés correctement dessinés mais sans positions clairement situées (parmi d'autres dessins)
- 2 4 carrés correctement dessinés et bien situés, ou bien 5 carrés avec la répétition de celui donné au départ ou bien 5 carrés correctement dessinés et bien situés, mais avec une figure erronée
- 1 3 ou 4 carrés correctement dessinés et bien situés, avec une figure fausse
- 0 Incompréhension du problème (par exemple, chaque réponse qui contient plus d'une figure qui n'est pas un carré)

**ANALYSE DES PROBLÈMES**

---

**5. BALL IN DEN KORB - LANCERS DANS DES PANIERS (Kat. 31, 32, 41)****ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver les différentes sommes de 12 nombres égaux à 1 ou à 10.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre la règle du jeu et comprendre que chaque balle de tennis rapporte un nombre de points différent : elle vaut 1 point si elle est lancée dans le panier à droite et 10 points si elle va dans le panier de gauche.
- Se rendre compte qu'il y a plusieurs sommes possibles, qui dépendent du nombre de balles entrées dans chacun des paniers.
- Imaginer ou dessiner la situation et calculer à chaque fois les points correspondants.
- Il y a plusieurs manières d'organiser les calculs : additionner les termes un à un (par exemple  $1+1+1+1+\dots+10+10$ ) ou en tenant compte des nombres de 1 et de 10, effectuer les combinaisons de multiplications et additions (par exemple  $5 \times 1 + 7 \times 10$ ).

Ou bien,

- calculer le score le plus bas, 12 (correspondant à 12 balles dans le panier de droite), trouver le score suivant en enlevant 1 et en ajoutant 10, et ainsi de suite jusqu'à arriver à 120 (correspondant à 12 balles dans le panier de gauche) : 12;  $12-1+10 = 21$  ;  $21-1+10 = 30$ ;  $30-1+10 = 39$  ; ... ;  $111-1+10 = 120$  (c'est-à-dire additionner 9 à chaque fois).
- De façon symétrique, partir du score le plus élevé, 120, puis, à chaque fois, soustraire 10 et ajouter 1 (c'est-à-dire soustraire 9 à chaque fois) jusqu'à arriver à 12.
- La recherche peut être organisée en un tableau qui met en évidence à la fois la décomposition de 12 en sommes de deux entiers et le nombre obtenu.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (12-21-30-39-48-57-66-75-84-93-102-111-120) avec une procédure organisée, un tableau ou une explication détaillée de la procédure suivie
- 3 Réponse correcte énumérant toutes les réponses mais avec une explication peu claire (omettant une ou plusieurs étapes), ou réponse partielle par manque d'un des scores possibles ou une erreur de calcul, mais avec le détail de la recherche
- 2 Réponse partielle (il manque entre deux et quatre scores possibles), ou deux ou trois erreurs de calcul, mais avec le détail de la recherche  
ou réponse partielle par manque d'un des scores possibles, ou avec une seule erreur de calcul, mais sans détails sur la recherche  
ou réponse correcte sans explication
- 1 Réponse partielle où il manque de cinq à sept scores possibles) ou bien quatre ou cinq erreurs de calcul, mais avec les détails de la recherche  
Ou réponse partielle où il manque de deux à quatre scores possibles, ou bien deux ou trois erreurs de calcul, mais sans détails sur la recherche
- 0 Incompréhension du problème ou toute autre réponse

**ANALYSE DES PROBLÈMES**

---

**6. ROBOTER ROBERT - LE ROBOT ROBERT** (Kat. 32, 41, 42)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Sur un réseau composé de deux types de segments, des courts et des longs, trouver la longueur d'un chemin composé d'un segment court et 5 segments longs, connaissant la longueur d'un chemin de 7 segments longs (56 pas) et celle d'un chemin de 3 segments courts et 3 segments longs (36 pas).

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que le robot Robert fait toujours un nombre entier de pas pour parcourir un segment de la grille et que pour parcourir des segments égaux, il comptera le même nombre de pas, puisque ses pas ont toujours la même longueur.
- Dédurre du premier chemin, composé de 7 segments longs, que chaque segment vaut 8 pas ( $56 : 7$ ).
- Observer le second chemin et se rendre compte qu'il est formé de 3 segments longs et de 3 segments courts.
- Trouver que pour parcourir les trois segments longs du second chemin, Robert fera 24 pas ( $8 \times 3$ ) et que pour parcourir les segments courts il en fera 12 ( $36 - 24$ ) ; par conséquent chaque segment court mesure 4 pas ( $12 : 3$ ).
- Conclure que pour parcourir le troisième chemin, composé de 5 segments longs et 1 segment court, Robert fera 44 pas ( $8 \times 5 + 1 \times 4$ ).

Ou bien,

- observer que le second chemin est formé de 3 segments courts et de 3 segments longs et en déduire que pour parcourir 1 segment long et 1 segment court Robert fait 12 pas ( $36 : 3$ ).
- Procéder par essais pour trouver combien de pas mesure chacun des deux segments (6-6, 7-5, 8-4, 9-3, 10-2, 11-1) et découvrir que l'unique possibilité compatible avec le premier chemin est 8 pas pour le segment long et 4 pas pour le segment court.
- Conclure que Robert fait 44 pas pour le troisième chemin.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (44 pas ou 44) avec des explications claires (montrant la détermination de 8 pas, puis de 4 pas et le total  $8 \times 5 + 4$ , ou avec les nombres de pas de chaque segment notés sur les dessins)
- 3 Réponse correcte (44 pas ou 44) avec des explications peu claires (par exemple sans dire comment ont été trouvés les nombres de pas 8 et 4)
- 2 Réponse correcte (44 pas ou 44) sans explications  
ou raisonnement correct mais avec une erreur de calcul
- 1 Début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème ou mesure avec une règle des longueurs des segments pour compter les nombres de pas

**ANALYSE DES PROBLÈMES****7. ANNIE UND IHR FRIES - LA FRISE D'ANNIE** (Kat. 32, 41, 42)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer l'aire de la partie grise d'une frise coloriée en noir et gris, dont le début est dessiné sur du papier quadrillé, en connaissant l'aire totale de la partie noire de la frise entière.

**Analyse de la tâche**

- Observer le dessin du début de la frise et éventuellement chercher à comprendre la règle de construction.
- Remarquer que la zone coloriée en noir est formée de 3 carrés noirs visibles sur la figure, et de 6 triangles noirs formés de deux demis carrés correspondant donc chacun à un carré. Ainsi les 6 triangles « comptent » pour 6 carrés.
- Pour déterminer le nombre total de carrés de la partie grise on peut procéder de plusieurs manières. Reproduire la frise sur une feuille quadrillée et s'arrêter lorsqu'on a compté 58 carrés noirs. Compter ensuite les carrés correspondant à la partie grise et trouver qu'il y en a 116. Cette procédure est longue et demande de l'attention dans le comptage des carrés.

Ou bien,

- se rendre compte qu'il y a un motif qui se répète, constitué d'une bande verticale de trois carrés avec celui du milieu en noir et d'une autre bande verticale de six carrés avec deux triangles noirs, chacun correspondant à un carré. Dans ce motif, la partie noire correspond donc au total à 3 carrés, alors que la partie grise correspond au double, c'est-à-dire à 6 carrés.
- Déterminer le nombre de motifs dans la frise complète, en cherchant le plus grand multiple de 3 inférieur à 58 ou en effectuant la division avec reste de 58 par 3, et obtenir 19. Se rendre compte qu'avec 19 motifs on arrive à 57 carrés noirs et qu'il y a donc à rajouter un autre carré noir. En déduire que la frise complète se termine avec une bande verticale d'un carré noir et 2 carrés gris.
- Calculer enfin le nombre de carrés gris, en considérant qu'il y en a 6 dans chaque motif et 2 dans la bande terminale de la frise, et trouver que ce nombre est 116 ( $6 \times 19 + 2$ ).
- Il y a encore d'autres modalités pour organiser la décomposition de la frise et faire les calculs correspondants (par ex., en partant de la figure de l'énoncé dans laquelle on « compte » 9 carrés noirs, considérer les multiples de 9, arriver à 54 et en déduire que pour avoir les 4 derniers carrés manquants, la frise doit se continuer avec un motif complet de trois carrés noirs et se terminer avec une bande verticale d'un carré noir et deux gris).

Ou bien (procédure qui suppose un raisonnement de proportionnalité),

- observer que dans chaque bande verticale (constituée de 3 carrés), la partie noire correspond toujours à un carré et donc la partie grise toujours au double, c'est-à-dire à 2 carrés. Par conséquent en sachant que dans la frise complète la zone coloriée en noir correspond à 58 carrés, la partie coloriée en gris correspondra à son double, c'est-à-dire à 116 carrés.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (116 carrés) avec un dessin complet et correctement colorié de la frise  
ou une explication claire de la procédure (détermination du motif répété et description de la partie finale de la frise)  
ou emploi de la « proportionnalité »,... avec les calculs effectués
- 3 Réponse correcte avec des explications insuffisantes (dessin incomplet, procédure de calcul peu explicitée,...)
- 2 Réponse erronée due à une interprétation incorrecte de la fin de la frise  
ou bien dessin complet et correctement colorié, mais avec une erreur de comptage  
ou bien réponse correcte sans dessin ni explication
- 1 Réponse erronée due à un mauvais dessin des modules  
ou début de recherche avec la détermination correcte de l'aire de la partie en noir d'un module
- 0 Incompréhension du problème

**ANALYSE DES PROBLÈMES**

---

**8. DIGITALE UHRZEIT - L'HEURE DE L'HORLOGE DIGITALE (Kat. 41, 42, 71)**

---

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer l'heure indiquée par une horloge digitale qui s'était arrêtée à un instant donnée et qui est repartie de 00:00.

**Analyse de la tâche**

- Remarquer qu'une journée fait 24 heures et qu'une heure fait 60 minutes.
- Savoir que dans les horloges digitales minuit est indiqué 00:00.
- Comprendre que pendant que l'horloge s'arrête à 22:30, le réveil continue à fonctionner normalement.
- Comprendre que l'horloge recommence à fonctionner à 22:31.
- Calculer que de 22:31 jusqu'à minuit il se passe une heure et 29 minutes et que de minuit à sept heures du matin ils passe 7 heures ; additionner 1 h 29 à 7 h 00 et obtenir 8 h 29, l'horloge marquera 8:29 lorsque le réveil marquera 07:00.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (8:29 ou 8 h 29) avec des explications claires et complètes qui montrent comment le calcul du temps a été effectué
- 3 Réponse correcte avec des explications confuses ou approximatives
- 2 Réponse correcte sans explication, ou raisonnement correct, mais réponse fausse (par exemple, calcul erroné des minutes qui manquent pour arriver à minuit ou calcul erroné des heures de minuit à 7 h, ou bien réponse 8:31 ou 8:30)
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple, les calculs sont faits seulement avec les heures (22:00 - 07:00, 23:00 - 7:00) sans la fraction d'heure, ou 1.29 est soustrait de 7.00)
- 0 Incompréhension du problème



## ANALYSE DES PROBLÈMES

## 9. DIE DRACHEN - LES DRAGONS (Kat. 41, 42, 71)

## ANALYSE A PRIORI

## Tâche mathématique

Résoudre un système « élémentaire » de trois équations linéaires à trois inconnues avec des nombres entiers naturels dans un contexte imaginaire de têtes de dragons.

## Analyse de la tâche

- Comprendre que les nombres de têtes de chaque dragon ne sont pas connus mais que la première information donne la différence, 5, entre le nombre de têtes du dragon rouge et le nombre de têtes du dragon vert. Ces nombres peuvent être : 1 et 6, 2 et 7, 3 et 8, 7 et 12... Et la seconde information donne non seulement la différence, 4, entre le nombre des têtes du dragon jaune et le nombre de têtes du dragon vert mais aussi leur somme, 28.
- Commencer par chercher le nombre de têtes des dragons vert et jaune.
- Procéder par essais, en partant par exemple de 6 têtes pour le dragon vert et donc 10 pour le dragon jaune, vérifier que le total  $(6 + 10) = 16$  est différent de 28, puis poursuivre les essais en les organisant éventuellement (par exemple avec un tableau) pour aboutir à 12 têtes pour le vert et 16 pour le jaune,  $(12 + 16) = 28$ , puis se rendre compte que les essais successifs « s'éloignent » de 28, ce qui signifie que la solution est unique.

Ou bien,

- procéder par déduction, éventuellement en utilisant un schéma, en retranchant les 4 têtes de 28 pour obtenir deux nombres égaux dont la somme est 24 : 12 et 12 puis additionner 4 à l'un des deux et trouver 16 et 12.
- Utiliser ensuite la première information, disant que le dragon rouge a 5 têtes de moins que le dragon vert. Sachant que le nombre de têtes du dragon vert est 12, calculer le nombre de têtes du dragon rouge :  $12 - 5 = 7$ .
- Conclure que le dragon rouge a 7 têtes, le dragon vert a 12 têtes et le dragon jaune en a 16

Ou bien,

- Dédurre de la seconde information que le total 28 correspond à deux fois le nombre de têtes du dragon vert plus quatre têtes (que le jaune a en plus). Chercher donc, par essais ou par un raisonnement arithmétique ou à l'aide d'une représentation graphique, le nombre dont le double augmenté de 4 donne 28 et comprendre que c'est le nombre de têtes du dragon vert. Puis trouver le nombre de têtes du dragon rouge en exploitant la première information :  $12 - 5 = 7$ .

## Attribution des points

- 4 Réponse correcte (7 pour le dragon rouge, 12 pour le vert et 16 pour le jaune) avec une description claire de la démarche (indication des essais et de leur organisation, présentation complète des calculs) montrant que la solution trouvée est unique
- 3 Réponse correcte avec des explications incomplètes ou peu claires (seulement quelques essais) ou seulement une vérification
- 2 Réponse incomplète (16 pour le jaune et 12 pour le vert, oubli du rouge) avec explications claires  
ou réponse correcte pour les nombres de têtes du dragon vert (12) et du dragon jaune (16), mais une erreur pour le dragon rouge ( $17 = 12 + 5$ )  
ou bien réponse correcte sans explication ni vérification  
ou bien réponse qui montre une compréhension des informations avec des explications adéquates pour trouver la solution, mais avec des erreurs de calcul ou des imprécisions dans la résolution arithmétique
- 1 Début de recherche correcte, par exemple quelques essais montrant que les deux informations ont été comprises, mais sans succès
- 0 Incompréhension du problème

## ANALYSE DES PROBLÈMES

## 10. PATRICIAS VIERECKE - LES QUADRILATERES DE PATRICIA (Kat. 41, 42, 71, 81)

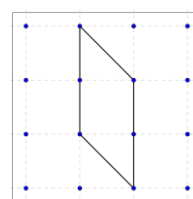
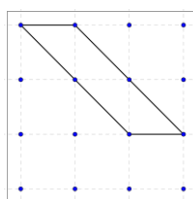
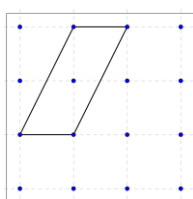
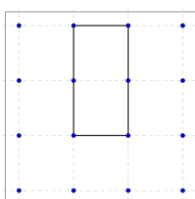
## ANALYSE A PRIORI

## Tâche mathématique

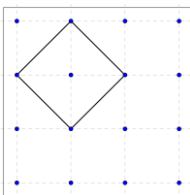
Sur les points d'un quadrillage 4x4, dessiner des quadrilatères dont l'aire vaut 2 carreaux du quadrillage et dont les sommets sont placés sur les points du quadrillage.

## Analyse de la tâche

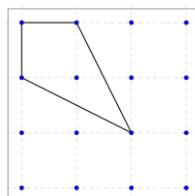
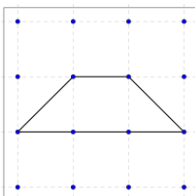
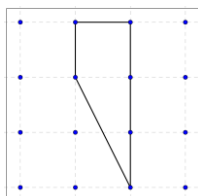
- Observer les exemples.
- Déterminer l'aire du quadrilatère de Patricia : 2 carreaux du quadrillage. Cette aire sera aussi celle de tous les quadrilatères à dessiner.
- Constater qu'il n'y a qu'un quadrilatère convenable formé de deux carrés entiers (le rectangle de 1 x 2), puis se rendre compte que les autres quadrilatères sont formés de moitiés de carreaux ou de rectangles.
- Comprendre que par isométrie, on n'obtient pas un nouveau quadrilatère, mais qu'en faisant glisser horizontalement une base du rectangle, on obtient trois parallélogrammes différents dont l'aire vaut 2 carreaux.



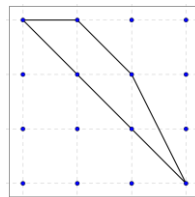
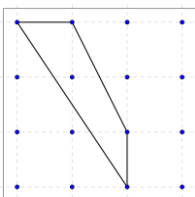
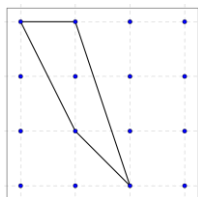
- Trouver ensuite le quadrilatère dont les quatre côtés sont obliques.



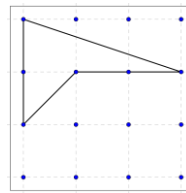
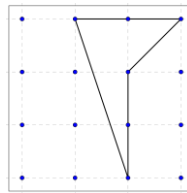
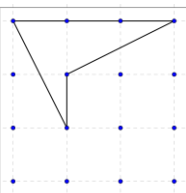
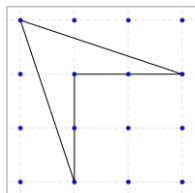
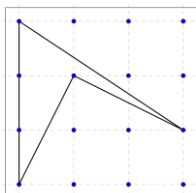
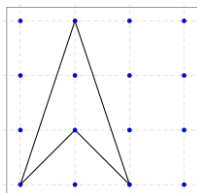
- Puis dans une recherche systématique, construire d'autres quadrilatères convenables :



- Et les trois suivants plus difficiles à trouver :



- En tout, il y a 12 quadrilatères convexes (en comptant celui de Patricia).
- Mais il y a encore des quadrilatères non convexes. En voici quelques-uns :



**ANALYSE DES PROBLÈMES**

---

**Attribution des points**

- 4 Dessins de 9 ou 10 nouveaux quadrilatères corrects (différents de celui de Patricia)
- 3 Dessins de 7 ou 8 nouveaux quadrilatères corrects  
ou dessins d'au moins 10 quadrilatères dont un seul ne vérifie pas les conditions
- 2 Dessins de 4, 5 ou 6 nouveaux quadrilatères corrects  
ou dessin de 8 ou 9 quadrilatères dont un seul ne vérifie pas les conditions  
ou dessin de 10 ou 11 quadrilatères dont deux ne vérifient pas les conditions
- 1 Dessins de 2 ou 3 nouveaux quadrilatères  
ou dessin d'au moins 7 quadrilatères dont trois ne vérifient pas les conditions
- 0 Dessin d'un seul quadrilatère nouveau  
ou dessin d'au moins 4 quadrilatères qui ne vérifient pas les conditions.

**ANALYSE DES PROBLÈMES****11. DIE PFLAUMEN – LES PRUNES (Kat. 41, 42, 71, 81)****ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Répartir 117 en quatre nombres proportionnellement à 1, 2, 4 et 2.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que les relations « double » et « moitié » sont inverses l'une de l'autre et que « le nombre de prunes du grand plat est le double de celui du plat moyen » signifie aussi que « le nombre de prunes du plat moyen est la moitié de celui du grand » et que par conséquent, le nombre de prunes du reste est le même que celui des prunes dans le plat moyen.
- Chercher 3 nombres, un petit, un moyen, double du petit, et un grand double du moyen, tels qu'en ajoutant un petit, deux moyens et un grand on trouve 117.
- Par essais, à partir du petit plat, écrire les quadruplets possibles : 1, 2, 4, 2 ; 2, 4, 8, 4 ; 3, 6, 12, 6 ... et se rendre compte qu'il faut aller jusqu'à 13, 26, 52, 26 pour satisfaire la condition que le total est 117.

Ou bien,

- Comprendre, éventuellement en ayant recours à un schéma, que le nombre total des prunes, 117, peut s'exprimer dans une même unité, le nombre de prunes du petit plat par exemple ce qui donne 1 unité pour le petit, 2 pour le moyen, 4 pour le grand et 2 pour le reste et en déduire que le nombre total d'unités est 9. Calculer ainsi la valeur d'une unité  $117 : 9 = 13$  dans le petit plat et donc  $13 \times 2 = 26$  dans le plat moyen, et enfin  $13 \times 4 = 52$  dans le grand plat.

Ou bien,

- Comprendre que le nombre total de prunes placées dans les trois plats est un nombre divisible par 7 et plus petit que 117 (112, 105, 98, 91, 84, ...). Prenons par exemple 112, on peut obtenir la quantité de prunes dans chaque plat en procédant de la manière suivante :  $112 : 7 = 16$  (prunes dans le petit plat),  $16 \times 2 = 32$  (prunes dans le plat moyen),  $16 \times 4 = 64$  (prunes dans le grand plat). Cette solution n'est pas acceptable car il reste 5 prunes et (non pas 32) dans le plat moyen. Avec un nombre total dans les plats de 91 prunes, on a :  $91 : 7 = 13$  (dans le petit plat),  $13 \times 2 = 26$  (dans le plat moyen),  $13 \times 4 = 52$  (dans le grand plat) et  $117 - 91 = 26$  ; le nombre de prunes en dehors des plats est égal au nombre de prunes dans le plat moyen.

Ou bien,

- Algébriquement : poser et résoudre l'équation dont l'inconnue  $x$  est le nombre de prunes dans le petit plat :  $x + 2x + 4x + 2x = 117$ , d'où  $x = 117/9 = 13$ .

**Attribution des points**

- 4 Réponse exacte et complète (petit plat : 13 prunes; moyen : 26 prunes; grand : 52 prunes) avec explications complètes et claires : soit des essais organisés (et non au hasard), soit la mention de 9 petits plats au total, soit une représentation graphique d'un partage avec les unités bien visibles
- 3 Réponse exacte et complète avec des explications incomplètes ou peu claires, par exemple : la division  $117 : 9$  sans expliquer ce que représente le 9, ou des essais au hasard sans faire apparaître explicitement l'unicité de la solution
- 2 Réponse correcte sans explication  
ou procédure correcte mais avec une erreur de calcul au cours de la résolution
- 1 Début de recherche cohérent, avec quelques essais non aboutis, ou avec seulement l'affirmation que le reste est égal au contenu du plat moyen
- 0 Incompréhension du problème

## ANALYSE DES PROBLÈMES

## 12. GEBURTSTAGE - LES ANNIVERSAIRES (Kat. 42, 71, 81)

## ANALYSE A PRIORI

## Tâche mathématique

Trouver tous les couples possibles de nombres à deux chiffres dans lequel le chiffre des dizaines de l'un correspond au chiffre des unités de l'autre et vice versa, donnant la même différence.

## Analyse de la tâche

- L'appropriation du problème nécessite la compréhension que chaque année les âges changent et augmentent d'une unité, l'an prochain ils auront 38 et 74 ans, l'année suivante 39 et 75 ans et ainsi de suite ; que les âges avancent au même rythme dans le temps et que l'écart reste constant ; la différence des âges  $73 - 37 = 36$  reste toujours la même.
- On pourrait alors partir de 0 et 36 ou 10 et 46.
- On peut construire deux suites en relation du type :
  - Martine 0 3 4 **15 26 37 48 59** 70...81
  - Marc 36 39 40 **51 62 73 84 95**...106...117
- et ainsi trouver toutes les solutions.
- Il faut savoir limiter les deux suites : 64 et 100 (et au-delà) ne conviennent pas car ils ne remplissent pas la condition « nombres à deux chiffres » ; de même 09 et 45 (et en deçà).
- On peut aussi remarquer que, pour trouver tous les âges qui nous intéressent, on doit à chaque fois ajouter 11 à chaque nombre du couple (15, 51) : (26, 62) (37, 73) (48, 84) (59, 95).
- Ou alors commencer par la différence entre 73 et 37 = 36 ; chercher ensuite les nombres dont la différence entre les chiffres des unités est 6 (par exemple  $11 - 5 = 6$  ;  $12 - 6 = 6$  ;  $13 - 7 = 6$  ;  $14 - 8 = 6$  ;  $15 - 9 = 6$ ), puis en déduire que les chiffres des dizaines peuvent être obtenus par l'échange avec ceux des unités. Par exemple, de  $14 - 8 = 6$ , voir que 84 et 48 conviennent.
- Ou exclure tous les âges de Martine plus petits que 10 ; essayer d'inverser les chiffres à partir de 12 et comprendre que la différence augmente toujours de 9, jusqu'à arriver à 15 et 51, où la différence est vraiment 36. Comprendre qu'au-delà du 15 la différence augmente. Passer à la dizaine suivante, en partant de 23 et trouver 26 et 62, dont la différence est 36. On comprend ici qu'il y a une régularité ; nous arrivons ainsi aux âges indiqués dans le texte, 37 et 73 ; les autres âges qui conviennent seront 48 et 84 et 59 et 95, parce qu'à chaque fois les âges augmentent de 11 (une dizaine plus une unité).
- Ou encore, en s'appuyant sur les caractéristiques de la numération décimale de position, poser que l'âge de Marc est de  $10a + b$  et que l'âge de Martine est alors de  $10b + a$  (a et b étant des nombres entiers entre 0 et 9, avec  $a > b$  (car Marc est plus âgé).
- On doit donc avoir  $10a + b = 10b + a + 36$ , d'où  $9(a - b) = 36$  et donc  $a - b = 4$ . Le cas  $b = 0$  est exclu car on doit trouver des nombres à deux chiffres. On trouve donc  $b = 1$  et  $a = 5$  (15 ans et 51 ans),  $b = 2$  et  $a = 6$  (26 ans et 62 ans),  $b = 3$  et  $a = 7$  (exemple donné dans l'énoncé),  $b = 4$  et  $a = 8$  (48 ans et 84 ans),  $b = 5$  et  $a = 9$  (59 ans et 95 ans).

## Attribution des points

- 4 Réponse correcte ("oui" avant 2017 : 15-51; 26-62; "oui" après 2017 : 48-84; 59-95, avec une explication détaillée (par exemple, des essais ordonnés en âges croissants)
- 3 Réponse correcte (les quatre couples) avec des explications incomplètes (par ex. seulement quelques essais) ou trois couples trouvés (à l'exclusion de celui de l'énoncé) avec des explications détaillées
- 2 Trois couples trouvés (à l'exclusion de celui de l'énoncé) avec des explications incomplètes ou deux couples trouvés avec des explications détaillées ou réponse correcte sans explications
- 1 Début de recherche organisée ou trois couples trouvés sans explication
- 0 Incompréhension du problème

## ANALYSE DES PROBLÈMES

## 13. EINE BESONDERE KISTE - UNE BOÎTE PARTICULIÈRE (Kat. 71, 81, 91, 10)

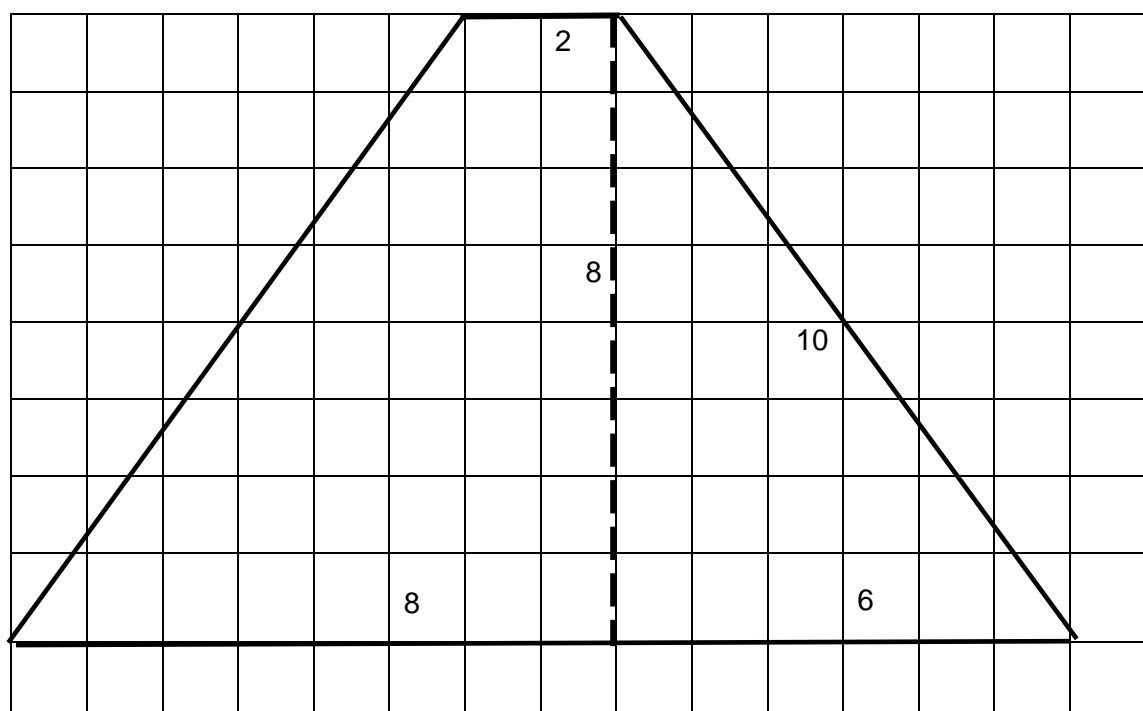
## ANALYSE A PRIORI

## Tâche mathématique

Reconnaître à partir du dessin de 4 de ses faces rectangulaires, qu'un solide est un prisme droit. Dessiner ses deux autres faces sachant qu'elles ont un seul axe de symétrie.

## Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut commencer en analysant les informations données par les mesures des quatre rectangles.
- Comprendre qu'à partir des quatre faces rectangulaires données, on peut construire un prisme droit.
- Comprendre que les faces données sont des faces latérales et que les deux faces à dessiner sont les deux bases identiques non rectangulaires.
- Remarquer que sur les quatre rectangles, deux ont des mesures totalement identiques et que les quatre rectangles ont une mesure commune.
- Faire des essais de positionnement des faces les unes par rapport aux autres : Essayer de mettre dans des plans parallèles les deux rectangles de mêmes dimensions et constater que les deux faces déjà dessinées ne s'adaptent pas à cette disposition. En déduire qu'ainsi on ne peut pas construire le solide recherché.
- Comprendre qu'il est possible de positionner les faces données les unes au bout des autres en utilisant leur mesure commune et comprendre en refermant la construction que les faces manquantes seront les bases d'un prisme droit.
- Réorganiser le positionnement des faces données pour que les faces manquantes aient un axe de symétrie
- Reconnaître que les bases seront donc des trapèzes isocèles dont les dimensions se déduisent des dimensions des rectangles déjà donnés
- Construire les figures en respectant les mesures
- En construisant un triangle rectangle à l'intérieur du trapèze, on vérifie avec la relation de Pythagore 6, 8, 10 que la hauteur du trapèze sera de 8 côtés de carreaux, le côté oblique de 10 et que la grande base du trapèze mesure  $6 + 2 + 6$



## Attribution des points

- 4 Dessin correct des deux figures manquantes ou d'une seule en indiquant que l'autre est identique (un trapèze isocèle avec les côtés mesurant 10-2-10-14 en côtés de carreaux), avec des explications claires
- 3 Dessin de deux trapèzes isocèles, mais avec une mesure erronée des côtés obliques ou un seul trapèze isocèle correctement dessiné sans préciser que l'autre figure manquante lui est égale
- 2 Dessin d'un trapèze isocèle avec toutes les mesures erronées, mais avec des explications ou dessin d'un quadrilatère irrégulier qui respecte les mesures des côtés (4, 10, 10 et 14) mais qui ne respecte pas la condition d'avoir un axe de symétrie

**ANALYSE DES PROBLÈMES**

---

- 1 Début de raisonnement correct avec une construction d'un quadrilatère qui vérifie deux des mesures ou déclaration verbale qui traite d'un trapèze isocèle
- 0 Incompréhension du problème

## ANALYSE DES PROBLÈMES

## 14. DIE DREIECKIGE PLATTE - LE PLATEAU TRIANGULAIRE (Kat. 71, 81, 91, 10)

## ANALYSE A PRIORI

## Tâche mathématique

Déterminer l'aire de trois petits hexagones réguliers superposables, connaissant l'aire d'un hexagone régulier dont la longueur des côtés est le triple de celle des côtés des petits hexagones. Tous les hexagones sont inscrits dans un triangle équilatéral.

## Analyse de la tâche

- Se rendre compte que les trois petits triangles ayant un côté commun avec un côté de l'hexagone sont équilatéraux et égaux (par exemple, observer que chacun d'eux a trois angles égaux : les côtés de l'hexagone régulier sont parallèles aux côtés du grand triangle, et par conséquent les angles d'un petit triangle sont égaux à ceux du grand triangle équilatéral ; on peut aussi les considérer comme supplémentaires aux angles des hexagones réguliers qui valent  $120^\circ$  chacun).
- La longueur des côtés du grand hexagone est donc le tiers de celle des côtés du grand triangle.
- Le grand triangle peut être divisé en 9 triangles équilatéraux égaux (6 formés à partir du centre de l'hexagone et 3 dans la partie restante).
- Connaissant l'aire de l'hexagone, il est donc possible de calculer l'aire d'un de ces triangles :  $4158 : 6 = 693 \text{ cm}^2$ .
- De même, chacun de ces triangles peut être divisé en 9 petits triangles dont 6 inclus dans un petit hexagone :  $693 : 9 = 77 \text{ cm}^2$ .
- L'aire d'un petit hexagone est donc  $77 \times 6 = 462 \text{ cm}^2$ . L'aire totale des trois petits hexagones mesure donc :  $462 \times 3 = 1386 \text{ cm}^2$ .

Ou bien,

- observer que chacun des 9 triangles peut être considéré comme composé de 9 petits triangles égaux entre eux. Ainsi, l'hexagone est formé de 54 triangles d'aire  $4158 : 54 = 77 \text{ cm}^2$ . Un petit hexagone a donc une aire de  $77 \times 6 = 462 \text{ cm}^2$ . L'aire totale des trois petits hexagones vaut donc  $462 \times 3 = 1386 \text{ cm}^2$ .

Ou bien,

- se rendre compte que l'on peut placer 7 hexagones dans le grand et qu'il reste 12 petits triangles équilatéraux qui forment 2 hexagones de plus. L'aire du grand hexagone est donc égale à celle de 9 petits, ce qui implique qu'un petit hexagone a une aire de  $462 \text{ cm}^2$  ( $4158/9$ ). Il reste à multiplier ce nombre par 3 pour obtenir la réponse.

Ou bien,

- considérer que la longueur des côtés des petits hexagones est le tiers de celle des côtés du grand hexagone, l'aire d'un petit hexagone est donc égale à  $(1/3)^2 = 1/9$  de l'aire de ce grand hexagone, soit  $1/9$  de 4158, donc  $462 \text{ cm}^2$ . Les trois petits hexagones auront donc une aire totale mesurant  $462 \times 3 = 1386 \text{ cm}^2$ .

Ou bien,

- Il est possible trouver le résultat exact ( $1386 \text{ cm}^2$ ) à partir de la formule de l'aire de l'hexagone faisant intervenir des radicaux qui peuvent conduire à des valeurs approchées (par ex.  $1385 \text{ cm}^2$ ) s'ils sont remplacés par des approximations décimales.

## Attribution des points

- 4 Réponse correcte ( $1386 \text{ cm}^2$ ) avec des explications claires et complètes de la procédure suivie
- 3 Réponse correcte avec des explications partielles (par exemple, on ne précise pas que les triangles sont équilatéraux et égaux)  
ou réponse  $1385 \text{ cm}^2$  en raison de l'approximation dans les calculs, avec des explications claires et complètes de la procédure suivie  
ou réponse  $462 \text{ cm}^2$  (calcul de l'aire d'un seul petit hexagone) avec des explications claires et complètes
- 2 Procédure correcte avec des erreurs de calcul mais avec des explications claires et complètes  
ou bien, réponse  $461 \text{ cm}^2$  (aire d'un seul hexagone petit) en raison d'approximations dans les calculs, avec des explications claires et complètes  
ou réponse correcte sans explication
- 1 Début de recherche cohérente (par exemple, division de l'hexagone en 6 triangles équilatéraux égaux et calcul de leur aire)  
ou réponse obtenue en utilisant des mesures pour trouver que le côté du grand hexagone est le tiers du côté du grand triangle
- 0 Incompréhension du problème



**ANALYSE DES PROBLÈMES**

---

**15. EIN SACK VOLLER BOHNEN - SAC DE HARICOTS** (Kat. 81, 91, 10)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer l'unique nombre compris entre 1400 et 1700, quand les restes des divisions de ce nombre par 2, 3, 5 et 7 sont respectivement 1, 0, 2 et 5.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que s'agissant d'un grand nombre, il n'est pas possible de travailler avec des objets ou des dessins. Il est nécessaire d'utiliser l'écriture des nombres dans des relations numériques.
- Trouver une méthode d'élimination ou de choix qui évite de faire trop de divisions pour déterminer les restes.
- La recherche doit être faite sur tous les nombres compris entre 1400 et 1700, en éliminant successivement :
  - ceux qui se terminent par un chiffre pair (0, 2, 4, 6, 8) pour respecter la deuxième condition,
  - ceux qui ne sont pas divisibles par 3 pour respecter la troisième condition,
  - ceux qui ne se terminent pas par 7 pour respecter la quatrième condition (le chiffre des unités d'un multiple de 5 moins 3 est 7 ou 2, qui est à éliminer d'après la deuxième condition).
- Arrivé à ce point, il reste à écrire tous les nombres impairs compris entre 1400 et 1700 qui se terminent par le chiffre 7 et qui sont multiples de 3. On peut réduire l'ensemble des nombres à examiner pour trouver les multiples de 3 (si d et c désignent les chiffres des dizaines et des unités du nombre cherché :  $1 + c + d + 7$  est multiple de 3 avec  $c + d \leq 18$ ). On obtient : 1407, 1437, 1467, 1497, 1527, 1557, 1587, 1617, 1647, 1677.
- Trouver enfin que le nombre 1587 est le seul qui réponde aux cinq conditions :  $(226 \times 7) + 5 = 1587$ .

Ou bien

- écrire tous les multiples de 7 augmentés de 5 entre 1400 et 1700, éliminer les nombres pairs et conserver seulement ceux qui finissent par 7 (1447, 1517, 1587, 1657) pour arriver à conserver seulement 1587, qui est l'unique nombre multiple de 3.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (1587) avec les détails d'une recherche systématique
- 3 Réponse correcte (1587) avec les détails d'une recherche non exhaustive
- 2 Réponse correcte sans explications ou réponse fausse à cause d'une erreur de calcul dans une recherche systématique
- 1 Début de recherche correcte
- 0 Incompréhension du problème

## ANALYSE DES PROBLÈMES

## 16. FRAU SCHMETTERLING - MADAME PAPILLON (Kat. 81, 91, 10)

## ANALYSE A PRIORI

## Tâche mathématique

Reconnaître les triangles formés par les côtés et les diagonales de trapèzes dont les mesures des bases (8 et 12) et de la hauteur (15) sont données, calculer leurs aires et constater qu'elles sont indépendantes de la valeur des angles du trapèze.

## Analyse de la tâche

- Pour chacune des deux figures, remarquer que les triangles formés par une aile grise et un petit triangle blanc ont une base de 8 cm et la hauteur correspondante de 15 cm, ils ont donc la même aire. En déduire que dans chaque figure, les deux ailes grises ont la même aire. Il reste à les comparer d'une figure à l'autre. On peut aussi travailler avec le grand triangle blanc.

## Méthode expérimentale

- Reproduire sur une feuille de papier quadrillée les deux figures du papillon et les deux droites parallèles en utilisant les mesures données, 15, 12 et 8, en côtés de carreau. Se rendre compte expérimentalement que pour chaque papillon, les deux ailes se coupent en un point qui est à 6 côtés de carreau de la droite du bas et 9 côtés de celle du haut.
- Vérifier que des telles valeurs sont correctes en calculant l'aire des deux ailes d'un même papillon, on trouve la même valeur (36 carreaux), d'abord en partant de l'aire du triangle formé d'une aile et du petit triangle blanc et en enlevant l'aire de ce dernier, ensuite en partant de l'aire du triangle formé d'une aile et du grand triangle blanc et en enlevant l'aire de ce dernier. En déduire que le coup de vent n'a pas changé les aires des ailes.

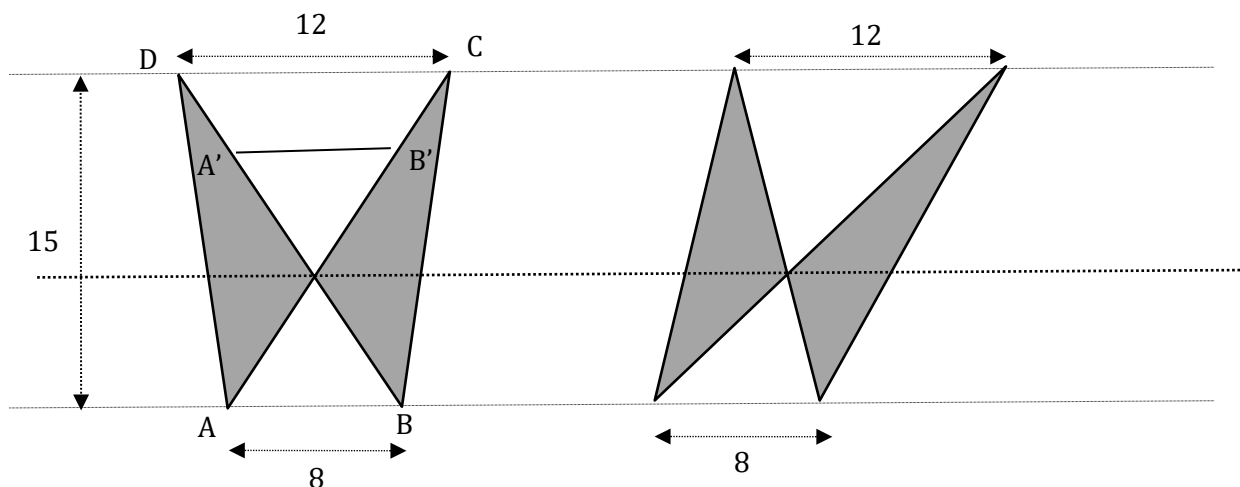
Observation : des mesures prises directement sur les figures données dans l'énoncé ne peuvent pas aboutir au calcul de l'aire des ailes ni à la conclusion que les aires des triangles gris sont les mêmes, à cause des approximations inévitables.

## Méthode algébrique pour le calcul de l'aire d'une aile

- Remarquer que les ailes de Madame Papillon sont inscrites dans deux trapèzes de bases 12 cm et 8 cm et de hauteur 15 cm et donc de même aire ( $A = (12+8) \times 15 / 2 = 150 \text{ cm}^2$ ).
- Quelle que soit la figure considérée, on note  $a$  l'aire d'une des deux ailes,  $h$  la hauteur du petit triangle blanc,  $H$  celle du grand triangle blanc, et  $A$  l'aire du trapèze. Pour les deux figures, on a les relations :  $H + h = 15$  ;  $A = 2a + 4h + 6H$  et  $a = 4 \times 15 - 4h$ . On en déduit l'équation en  $h$  :  $8 \times 15 - 8h + 4h + 6(15 - h) = 150$ , d'où  $h = 6$ .
- Pour les deux figures, l'aire d'une aile est donc égale à  $4 \times 15 - 4 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$ . Le coup de vent n'a pas changé les aires des ailes.

## Méthode géométrique pour le calcul de l'aire d'une aile

- Après avoir montré que pour chaque papillon les deux ailes ont la même aire, travailler sur la figure de gauche et observer que la diagonale AC (ou de manière analogue, la diagonale BD) divise le trapèze ABCD en deux triangles (ACB et ACD). ACB a pour aire  $8 \times 15 / 2 = 60 \text{ cm}^2$  et ACD a pour aire  $12 \times 15 / 2 = 90 \text{ cm}^2$ .
- Puisque chacun de ces triangles est formé d'un triangle gris et d'un blanc et que les triangles gris sont de même aire, la différence entre les aires ( $30 \text{ cm}^2$ ) est due à la différence entre les aires des triangles blancs.



- Soit  $B'KA'$  le triangle symétrique de  $AKB$  par rapport à  $K$ . L'aire du trapèze  $A'B'CD$  est donc égale à la différence des aires des triangles  $AKB$  et  $DKC$ . La hauteur de ce trapèze est  $h = 30 \times 2 / (12+8) = 3 \text{ cm}$ . La hauteur du triangle  $AKB$  est par conséquent égale à  $(15-3)/2 = 6 \text{ cm}$  et celle du triangle  $DKC$  est égale à  $9 \text{ cm}$ .

## ANALYSE DES PROBLÈMES

- On peut donc calculer l'aire des ailes du papillon ( $36 \text{ cm}^2$  chacune) par exemple par différence entre l'aire du triangle DAB ( $15 \times 8/2$ ) et celle du petit triangle blanc KAB ( $6 \times 8/2$ ).  
Eventuellement, considérer la droite passant par les points communs aux ailes de chaque papillon et faire l'hypothèse qu'elle est parallèle aux droites contenant les bases des triangles blancs (Voir figure ci-dessus). Comprendre alors que les petits triangles blancs sur les deux figures ont la même aire, puisqu'ils ont leurs bases de même longueur (8 cm) et la même hauteur. Idem pour les grands triangles blancs. Comme les triangles formés par une aile grise et un petit triangle blanc ont la même aire, on en déduit que les 4 ailes dessinées sur les deux figures ont la même aire et que le coup de vent n'a pas modifié l'aire des ailes de Madame Papillon.

Ou bien (solutions expertes)

- Observer que, dans la figure de gauche comme dans celle de droite, les deux triangles blancs sont semblables (angles égaux chacun à chacun) ou homothétiques (le centre d'homothétie est le sommet commun des triangles gris) dont le rapport est égal à celui leurs bases (qui sont de mêmes longueurs dans les deux figures) :  $8/12 = 2/3$ . Leurs hauteurs sont donc aussi dans le même rapport,  $2/3$ . La distance entre les deux bases, 15 cm, est la somme de la hauteur du grand triangle blanc et de celle du petit triangle blanc, qui vaut  $2/3$  de celle du grand, soit  $1 + 2/3 = 5/3$  de la hauteur du grand triangle blanc. On peut donc en déduire les deux hauteurs des triangles blancs : celle du grand  $15 : 5/3 = 9 \text{ cm}$  et celle du petit  $15 : 5/2 = 6 \text{ cm}$ .
- Ou par le théorème de Thalès, en posant  $x =$  hauteur du petit triangle blanc et  $15 - x =$  hauteur du grand triangle blanc, on obtient l'équation :  $(15 - x)/x = 12/8$  pour trouver  $x = 6 \text{ cm}$ .
- L'aire des triangles blancs est donc, pour le grand :  $(12 \times 9)/2 = 54 \text{ cm}^2$ , et pour le petit  $(8 \times 6)/2 = 24 \text{ cm}^2$ .
- Finalement, calculer l'aire des triangles gris, qui est la même dans la figure symétrique comme dans l'autre, pour chacune des quatre ailes de la figure. Par exemple, partant du triangle formé du petit triangle blanc et d'un triangle gris, on trouve :  $(8 \times 15)/2 - 24 = 36 \text{ cm}^2$ .

## Attribution des points

- 4 Réponse correcte (non, le coup de vent n'a pas modifié l'aire des ailes qui est, pour chacune,  $36 \text{ cm}^2$ ) avec justification complète théorique ou expérimentale
- 3 Réponse correcte avec justification incomplète (par exemple on n'explique pas que les hauteurs des triangles blancs sont 6 cm et 9 cm)
- 2 Réponse correcte (non, le coup de vent n'a pas modifié l'aire des ailes qui est, pour chacune,  $36 \text{ cm}^2$ ) sans justification
  - ou réponse correcte « non » avec justifications, mais sans le calcul des aires
  - ou réponse « non » avec le calcul des aires erroné à cause d'une erreur sur les hauteurs des triangles blancs, avec justification
  - ou réponse correcte « non » qui se réfère à l'hypothèse de la droite passant par les centres des ailes
- 1 Réponse erronée avec des aires différentes, à partir de mesures prises sur la figure
- 0 Incompréhension du problème

## ANALYSE DES PROBLÈMES

## 17. EIN ALPENPASS MIT DEM FAHRRAD - UN COL DES ALPES EN VÉLO (Kat. 91, 10)

## ANALYSE A PRIORI

## Tâche mathématique

Déterminer la vitesse moyenne d'un mobile sur une partie d'un parcours connaissant les vitesses moyennes sur la partie complémentaire de ce parcours et sur le parcours entier.

## Analyse de la tâche

- Comprendre que pour trouver la vitesse du cycliste sur les 12 km de descente, il faut connaître le temps qu'il met pour faire cette descente.
- Remarquer que l'on peut connaître ce temps de descente si on connaît le temps de montée et le temps mis pour faire l'aller et retour.

Résolution par calcul du temps de descente

- Pour monter le col, le cycliste a fait 12 km à la vitesse de 20 km/h. Il monte donc 12 km en  $12/20 = 0,6$  h (soit 36 min).
- Pour faire les 24 km de l'aller et retour à la vitesse moyenne de 30 km/h, il doit mettre  $24/30 = 0,8$  h = 48 min. Il doit donc faire la descente en  $0,8 - 0,6 = 0,2$  h = 12 min.
- Il doit donc faire les 12 km de descente à la vitesse de  $12/0,2 = 60$  km/h.

Ou bien, résolution par essais

Si la vitesse de descente est égale à	Alors le temps pour faire 12 km de descente est égal à	Le temps de montée des 12 km est égal à	Le temps mis pour faire l'aller et le retour est égal à	La vitesse moyenne pour l'aller et retour est égale à
40 km/h	0,3 h	0,6 h	0,9 h	$24/0,9 = 26,7$ km/h
50 km/h	0,24 h	0,6 h	0,84 h	$24/0,84 = 28,57$ km/h
60 km/h	0,2 h	0,6 h	0,8 h	$24/0,8 = 30$ km/h

- D'après ce tableau, la seule réponse possible est 60 km/h.

Ou bien, résolution algébrique

- Connaître la relation entre la distance  $d$  parcourue par un mobile, son temps de parcours  $t$  et sa vitesse moyenne  $v$  sur ce parcours :  $d = v t$ .
- Comprendre ou vérifier par le calcul que la vitesse moyenne sur le parcours ne peut être égale à la moyenne des vitesses sur les 2 portions complémentaires.
- Si on note  $t_d$  le temps en heure mis par le cycliste pour descendre les 12 km de ce col et si on note  $v_d$  la vitesse moyenne demandée en km/h, on a :  $d = v_d t_d$ .
- On souhaite faire l'aller et le retour, 24 km, à la vitesse moyenne  $v = 30$  km/h. On a donc  $2d = v (t_m + t_d)$ , ce qui donne :  $24 = 30 (0,6 + t_d)$ , d'où  $t_d = 24/30 - 0,6 = 0,2$  et  $v_d = 12/t_d = 12/0,2 = 60$ . La vitesse demandée est 60 km/h.

## Attribution des points

- 4 Réponse correcte (60 km/h) avec explications claires
- 3 Réponse correcte avec explications peu claires ou erreur numérique dans un calcul ou réponse correcte avec essais mal organisés
- 2 Réponse correcte sans explication
- 1 Début de raisonnement correct : au moins le calcul du temps mis par le cycliste pour monter le col
- 0 Incompréhension du problème

## ANALYSE DES PROBLÈMES

## 18. ROBOTER ALPHA - ROBOT-ALPHA (Kat. 91, 10)

## ANALYSE A PRIORI

## Tâche mathématique

Déterminer combien de fois un mobile, faisant des allers et retours d'un point A à un point B, passe par B en se déplaçant sur un parcours défini sur des côtés de trapèzes égaux, étant donnés la vitesse, le temps et des relations entre les longueurs des côtés des trapèzes.

## Analyse de la tâche

- Comprendre que le robot pour parcourir des segments de même longueur, fera le même nombre de pas, car ses pas ont toujours la même longueur.
- Remarquer que la vitesse du robot (3 secondes pour chaque pas) et le temps pendant lequel le robot est en mouvement (10 heures) sont connus.
- Observer que le parcours entre A et B mis en évidence sur la figure 2 emprunte des côtés obliques et des bases des trapèzes isocèles.
- Comprendre qu'il faut déterminer la longueur en nombre de pas pour aller de A à B et qu'il faut pour cela exploiter les relations données entre les nombres de pas nécessaires pour parcourir les côtés des trapèzes, ainsi que la donnée sur le nombre de pas (52) effectués entre les points C et D du parcours indiqué.
- Il y a plusieurs manières de procéder. Remarquer que la longueur CD est composée de deux grandes bases et deux petites bases d'un trapèze. Comme une grande base vaut 9 pas de plus qu'un côté oblique qui vaut 4 pas de moins que deux petites bases, une grande base vaut deux petites bases plus 5 pas. La longueur CD fait 52 pas et vaut donc deux petites bases plus deux fois deux petites bases plus 5 pas, soit 6 petites bases plus 10 pas. On en déduit qu'une petite base vaut 7 pas  $((52 - 10)/6)$ . Par conséquent un côté oblique vaut 10 pas et une grande base 19 pas.

Ou bien,

- utiliser une représentation graphique pour illustrer les relations entre les nombres de pas sur les divers côtés des trapèzes.

Ou bien

- adopter un langage plus formalisé avec un système de trois équations à trois inconnues. Dans ce dernier cas, en notant par exemple B, b et l les inconnues exprimant respectivement les nombres de pas nécessaires pour parcourir une grande base, une petite base et un côté oblique d'un trapèze, on obtient le système d'équations :  

$$B = l + 9, \quad l = 2b - 4, \quad 2(b + B) = 52 \quad \text{dont on tire la solution : } B = 19, \quad l = 10 \quad b = 7.$$
- En déduire que la longueur du parcours de A à B est de 154 pas  $(4B + 4b + 5l)$ .
- Calculer le temps mis par le robot pour aller de A à B : 462 secondes  $(3 \times 154)$  et déterminer le nombre de parcours de A à B effectués par le robot en 10 heures (36 000 secondes), par la division avec reste de 36 000 par 462. On obtient 77 avec un reste de 426. En déduire que le robot a parcouru 77 fois la distance de A à B (en allers ou en retours) et qu'il reste encore 426 secondes, correspondants à 142 autres pas, pour commencer son 78<sup>ème</sup> parcours qui est donc entamé.
- Remarquer qu'un parcours du chemin allant de A vers B de rang impair part de A (le premier, le troisième ...) et un parcours de rang pair part de B (le second, le quatrième...). Le robot- Alpha est donc passé 39 fois par B  $(78/2)$ .

## Attribution des points

- 4 Réponse correcte et complète (39 fois) avec explication claire de la procédure (détermination de la longueur du parcours et calculs corrects et clairement interprétés)
- 3 Réponse correcte et complète avec explications peu claires  
ou raisonnement correct et bien expliqué, mais avec une erreur de calcul
- 2 Détermination correcte de la longueur des trois côtés du trapèze avec des explications claires  
ou bien réponse correcte sans explication
- 1 Début de raisonnement correct (par ex. des relations entre les côtés du trapèze interprétées correctement et quelques essais de calcul)
- 0 Incompréhension du problème

**ANALYSE DES PROBLÈMES**

---

**19. MIT EINEM WÜRFEL GEWINNEN - GAGNER AVEC UN DÉ** (Kat. 91, 10)**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

En jetant un dé deux fois, donner la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre intuitivement que Jean a tort, puisqu'il n'y a qu'une chance sur six d'obtenir un 6 en un lancer, donc moins de 2 sur 6 en deux lancers.
- Comprendre qu'en jetant deux fois un dé, on peut obtenir  $6 \times 6 = 36$  couples possibles de faces du dé et que tous ces couples ont la même chance d'arriver :  $1/36$ .
- Dénombrer les couples de faces qui font perdre : ceux qui ne présentent pas la face 6 : à chacune des 5 faces qui font perdre au premier lancer, associer les 5 faces qui font perdre au deuxième lancer. En trouver 25 ( $5 \times 5$ ). Conclure qu'il y a 25 chances de perdre sur 36. En déduire qu'il y a  $36 - 25 = 11$  chances de gagner sur 36.

Ou bien,

- imaginer que Jean lance le dé une deuxième fois, même s'il a obtenu un 6 au premier lancer. Dénombrer les couples de faces du dé qui font gagner parmi les 36 possibles : ceux qui commencent par un 6 et ceux qui ne commençant pas par un 6 mais présentent un 6 en deuxième lancer. En trouver 11. Conclure : 11 chances sur 36 de gagner.

Ou bien,

- Recourir à une représentation graphique (par ex., un arbre).

Ou bien,

- Calculer la probabilité d'obtenir 6 au premier lancer ( $1/6$ ) et la probabilité d'obtenir 6 au deuxième sachant qu'on n'a pas obtenu 6 au premier ( $5/6 \times 1/6$ ). En déduire la probabilité de gagner à ce jeu :  $1/6 + 5/6 \times 1/6 = 11/36$ .

**Attribution des points**

- 4 Réponse exacte (Jean a tort : la probabilité de gagner est  $11/36$ , ou bien il y a 11 chances de gagner sur 36) avec une explication claire et complète (une description détaillée des différents cas et de la manière de faire ce calcul)
- 3 Réponse exacte avec une explication peu claire ou incomplète
- 2 Réponse : « Jean a tort », avec une explication intuitive sans valeur numérique  
Ou dénombrement correct des cas où l'on perd (25) avec ou sans explication
- 1 Réponse fausse (dans le calcul de la probabilité) due à une erreur de dénombrement, mais procédure correcte (par exemple 12 chances sur 36 en comptant deux fois le double 6)
- 0 Réponse : Jean a raison ou incompréhension du problème