

**1. DU PLUS PETIT AU PLUS GRAND - VOM KLEINSTEN ZUM GRÖßTEN (Cat. 3)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Logique : relation d'ordre, déduction

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il y a deux relations opposées dans les données « plus grand » et « plus petit » et qu'il faut les exprimer avec une seule des deux ; par exemple Michel est plus petit qu'Anne, mais Anne est plus petite que Carla.
- Traiter les informations dans l'ordre où elles sont données : Michel - Anne, puis Carla - Paul, puis Louis - Michel, puis Anne - Carla et rassembler ces conditions : Louis - Michel - Anne - Carla – Paul ;

Ou, appliquer la « transitivité » de la relation d'ordre « est plus petit que » aux données ainsi classées et interprétées :

- Louis est plus petit que Michel et Michel est plus petit que Anne, on en déduit que Louis est plus petit que Anne;
- Anne est plus petite que Carla et Carla est plus petite que Paul donc Anne est plus petite que Paul.

On en conclut que Louis est le plus petit de tous parce qu'il est aussi plus petit que Carla et Paul et ainsi on peut ordonner les enfants : Louis - Michel - Anne - Carla - Paul.

**Attribution des points**

- 4 Classement correct : Louis, Michel, Anne, Carla, Paul
  - 3 Classement en ordre inverse (les noms sont écrits de droite à gauche : P, C, A, M, L)
  - 2 Trois des quatre données sont respectées ; l'une ne l'est pas ou l'un des enfants ne figure pas dans le classement (par exemple, si la donnée « Paul est plus grand que Carla » n'est pas respectée : L, M, A, C figurent dans cet ordre et P peut se situer n'importe où avant C ou ne pas figurer dans le classement)
  - 1 Deux conditions seulement sont respectées
  - 0 Une seule condition est respectée,  
ou dessins ou écritures représentant les différentes données, mais sans rapports entre elles,  
ou incompréhension du problème
-

**2. LES CHOCOLATS DE VICTOR - VICTOR UND SEINE SCHOKO-RIEGEL (Cat 3, 4)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Combinatoire

**Analyse de la tâche**

- Procéder par essais et ajustements en contrôlant à chaque fois que la même sorte de chocolat n'apparaît pas deux jours de suite.

Ou : se rendre compte qu'il faut commencer par choisir les jours des quatre chocolats laits et constater qu'il n'y a qu'une possibilité pour le faire ; les 1<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> jours.

puis procéder de façon systématique pour placer les trois autres chocolats sur les trois autres jours, (par exemple en choisissant le jour du praliné, on s'aperçoit que les deux autres jours sont pour les chocolats blancs).

- Déterminer ainsi les trois solutions et les noter jour par jour d'une manière claire. (En toutes lettres ou par des abréviations sans ambiguïtés, ou par une disposition en lignes et colonnes du genre :

lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
lait	blanc	lait	blanc	lait	praliné	lait
lait	blanc	lait	praliné	lait	blanc	lait
lait	praliné	lait	blanc	lait	blanc	lait

**Attribution des points**

- 4 Les 3 solutions correctes clairement présentées : L B L B L P L , L B L P L B L et L P L B L B L
  - 3 Les 3 solutions correctes avec une autre incorrecte  
ou 2 solutions correctes et pas de solution incorrecte
  - 2 Les 3 solutions correctes avec plus d'une solution incorrecte  
ou 2 solutions correctes et une solution incorrecte  
ou une solution correcte et aucune incorrecte
  - 1 2 solutions correctes avec plus d'une solution incorrecte  
1 solution correcte avec une seule solution incorrecte
  - 0 1 solution correcte et plusieurs solutions incorrectes  
ou aucune solution correcte ou incompréhension du problème
-

**3. UNE PHOTO D'AFRIQUE - FOTO AUS AFRIKA** (Cat 3, 4)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : addition, double et moitié, proportionnalité (intuition)

**Analyse de la tâche**

- Comprendre les deux contraintes : les 36 animaux ; plus de zèbres que de girafes (le double).
- Procéder par essais de répartitions non systématiques ou par dessins, jusqu'à arriver à la solution (12, 24)

Ou, procéder par essais et ajustements systématiques à partir de l'une des deux contraintes :

- « 36 animaux » (1 et 35 ; 2 et 34 ; ...) jusqu'à obtenir le double de zèbres ;
- « le double de zèbres » (1 et 2 ; 2 et 4 ; 3 et 6 ; ...) jusqu'à obtenir une somme égale à 36 ;

Ou, commencer par répartir les 36 animaux en deux groupes égaux puis augmenter et diminuer simultanément chacun des nombres de façon à obtenir un nombre double de l'autre.

Ou, prendre en compte le rapport de 1 girafe pour 2 zèbres en imaginant des groupes de 3 animaux et conclure qu'il faudra 12 groupes, soit par la multiplication  $3 \times ? = 36$ , soit par la division  $36 : 3 = ?$  soit par additions répétées.

Ou, considérer directement que les animaux se répartissent en **une** partie de girafes et **deux** parties de zèbres pour voir ainsi les **trois** parties équivalentes - ou les trois tiers - et diviser immédiatement 36 par 3 pour trouver le nombre de girafes (stratégie peu probable en catégorie 3).

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (24 zèbres et 12 girafes), avec démarche claire (dessin, suite de calculs, tableau...) ou vérification des contraintes
  - 3 Réponse correcte avec démarche peu claire ou absence d'explication
  - 2 Réponse « 24 girafes et 12 zèbres » (mauvaise interprétation du mot double) ou démarche correcte avec erreur de calcul
  - 1 Réponse pour laquelle une seule des deux contraintes est vérifiée (total égal à 36 ou nombre de zèbres double du nombre de girafes)
  - 0 Incompréhension du problème
-

**4. LES CARRÉS DE PAUL - PAUL UND SEINE QUADRATE (Cat. 3, 4, 5)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

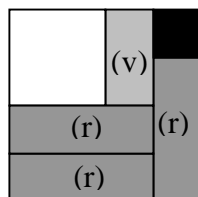
- Géométrie : carrés, rectangles, aires

**Analyse de la tâche**

- Percevoir, d'après les figures données, les rapports entre les dimensions des quatre sortes de pièces : (1 x 1), (1 x 2), (1 x 3) et (2 x 2) afin de pouvoir les juxtaposer.
- Comprendre que pour construire les carrés on ne peut utiliser que les huit pièces à disposition pour chaque construction, mais qu'il n'est pas nécessaire de les utiliser toutes.
- Vérifier les deux exemples de carrés d'une seule couleur (qui utilisent pourtant plusieurs pièces).
- Chercher à construire un carré de deux couleurs (avec deux sortes de pièces) et voir qu'il n'y a qu'une possibilité pour un carré de 3 x 3, avec les trois petits rectangles et un grand rectangle (voir ci-dessous). (On ne peut utiliser ni le petit carré noir, ni le grand blanc car il faudrait encore deux autres sortes de pièces pour terminer la construction. Pour un carré plus grand, de 4 x 4, il faudrait aussi plus de deux sortes de pièces.)



- Constater que, pour le carré avec quatre sortes de pièces, il n'existe pas de carré de 3 x 3, par essais ou par des considérations sur les aires. (Les quatre sortes de pièces donnent au minimum une aire de  $1 + 4 + 2 + 3 = 10$ , qui est supérieur à  $3 \times 3 = 9$ ). En cherchant à construire des carrés de 4 x 4, avec les quatre sortes de pièces, on s'aperçoit qu'il n'y a aussi qu'une solution, par essais (ou éventuellement, pour les plus grands élèves, par des considérations sur les aires : une pièce de chaque sorte donne déjà une aire de 10, pour aller à 16 il faut obligatoirement ajouter deux pièces d'aire 3, c'est-à-dire deux grands rectangles. )
- Former alors un carré de 4 x 4 avec le petit noir, le grand blanc, un petit rectangle vert et les trois grands rectangles rouges.

**Attribution des points**

- 4 Les deux carrés dessinés correctement, avec les pièces apparentes indépendamment de la disposition des pièces
- 3 Les deux carrés dessinés correctement, mais avec la présence d'autres carrés obtenus avec les mêmes pièces, disposées autrement (contrairement à la demande : « ne dessinez qu'un seul carré de 2 ou 4 couleurs »)
- 2 Un seul des deux carrés dessiné correctement avec les pièces apparentes  
ou les deux carrés dessinés correctement avec un ou plusieurs autres carrés qui ne satisfont pas les conditions (avec par exemple deux carrés noirs, ou plus de trois rectangles gris clair, ou trois couleurs au lieu de deux...)
- 1 Un ou deux carrés de deux ou quatre couleurs, qui ne satisfont pas les conditions  
ou un rectangle (non carré) respectant les contraintes
- 0 Incompréhension du problème

**5. DES TRIANGLES DANS TOUS LES SENS - DREIECKE ÜBERALL (Cat. 3, 4, 5)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Géométrie : reconnaissance de triangles dans une figure complexe
- Logique : dénombrement organisé

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il y a des triangles de tailles différentes et que certains peuvent en contenir d'autres plus petits.
- Identifier les quatre types de triangles.
- Compter tout d'abord les plus petits (16)
- S'organiser pour ne pas oublier de triangles parmi les autres types (qui se superposent partiellement) soit en les dessinant de couleurs différentes, soit en marquant leurs sommets ... et trouver :
  - les 7 qui contiennent 4 petits triangles, si l'on n'oublie pas celui du centre qui « a la tête en bas »,
  - les 3 qui contiennent 9 petits triangles,
  - et celui qui contient les 16 petits. Au total ;  $16 + 7 + 3 + 1 = 27$

Ou, découper un triangle fait de 4 petits triangles, un autre de 9 petits triangles les placer sur le grand triangle pour trouver toutes les positions qu'ils peuvent occuper.

**Attribution des points**

- 4 Réponse exacte et complète (27 triangles : 16 petits ; 7 de « quatre » ; 3 de « neuf » et le grand) avec tracé des différents triangles ou une liste ou autre description claire et correcte
  - 3 Réponse avec l'oubli du triangle « tête en bas » (26 : 16 petits ; 6 de « quatre » ; 3 de « neuf » et le grand) ou réponse exacte (27) avec dessins ou inventaire mais sans indiquer le nombre de chaque catégorie
  - 2 Réponse 27 ou 26 sans description ni dessin  
ou trois des quatre types de triangles identifiés et comptés sans erreurs  
ou identification des quatre types de triangles mais le dénombrement est incomplet et conduit à une réponse de 18 à 25
  - 1 Seuls les petits triangles et le grand ont été identifiés (réponse 17)  
ou deux autres types de triangles
  - 0 Incompréhension du problème ou seulement le grand triangle ou seulement les 16 petits
-

**6. LES BUTS DU MONDIAL – DIE TORE DER WELTMEISTERSCHAFT (Cat. 4, 5)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissance**

- Arithmétique : les 4 opérations, nombres pairs et impairs

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il reste 38 pages à remplir avec 133 photos.
- Comprendre aussi qu'il y a alors 19 pages paires et 19 pages impaires à remplir.
- Comprendre que chaque page paire contient une photo de plus que chaque page impaire.
- Procéder par essais et ajustements successifs, (par exemple en multipliant deux nombres qui se suivent par 19 et en les additionnant pour obtenir 133).

Ou partir de divisions et d'ajustements :

diviser 133 par 38, puis ajuster à partir du quotient (ou essayer en partant de  $38 \times \dots$  de s'approcher de 133) ;

diviser 133 par 19, on trouve 7 à partager entre une page paire (4 photos) et une page impaire (3 photos) ;

diviser approximativement 133 par 2 (prendre par exemple 66) et diviser le résultat par 19, puis ajuster.

Ou, soustraire 19 de 133 (une photo par page paire, diviser par 2 ;  $114 : 2 = 57$ , distribuer les 57 photos en parts égales sur les 19 pages  $57 : 19 = 3$  et conclure qu'il y a 3 photos par page impaire et 4 par page paire.

- Répondre à la question : 4 photos sur la page 4 et 3 photos sur la page 33.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (4 photos sur la page 4 et 3 photos sur la page 33), avec explications claires et complètes
  - 3 Réponse correcte avec une explication incomplète ou confuse
  - 2 Réponse correcte sans explication ou démarche correcte avec une seule erreur de calcul
  - 1 Début de recherche correcte (au moins arriver à 133 photos à répartir sur 38 pages)
  - 0 Incompréhension du problème
-

**7. MUSICIENS, COMÉDIENS ET DANSEURS -  
MUSIKER, SCHAUSPIELER UND TÄNZER (Cat. 4, 5, 6)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : dénombrement, addition, soustraction

**Analyse de la tâche**

- A la lecture du texte, comprendre que les nombres d'élèves dans les trois groupes sont ordonnés ainsi : nb. musiciens > nb. danseurs > nb. comédiens, que les trois nombres sont différents, que leur somme est 20, et qu'il y a 6 de différence, au maximum, entre le petit nombre et le grand nombre.
  - Comprendre que, pour répondre à la question, il faudra rechercher « toutes les manières de répartir les élèves » c'est-à-dire dresser l'inventaire complet des décompositions de 20 selon les contraintes citées ci-dessus.
  - Pour cela, on peut procéder par essais et ajustements, avec le risque de ne pas être exhaustif.
  - On peut aussi organiser les décompositions de façon à ne pas en oublier. Les modes d'organisation sont nombreux. En faisant des essais sur le nombre de comédiens auquel on ajoute de 1 à 6 pour obtenir le nombre de musiciens : on peut éliminer l'hypothèse « 1 » comédien car on aurait de 2 à 7 musiciens et donc de 17 à 12 danseurs, ce qui contredit une des contraintes.  $20 - (1 + 2) = 17$ ,  $20 - (1 + 3) = 16$ , ...  $10 - (1 + 7) = 12$ , de même, avec 2 comédiens, on aurait de 3 à 8 musiciens et donc de 15 à 10 danseurs, avec 3 comédiens, les essais de 4, 5, 6, 7, 8 musiciens donnent 13, 12, 11, 10, 9 danseurs mais l'essai de 9 musiciens (le maximum) donne  $20 - (3 + 9) = 8$  danseurs : première solution : **3 comédiens, 8 danseurs et 9 musiciens** ; avec 4 comédiens, on obtient les solutions **(4 ; 6 ; 10)** et **(4 ; 7 ; 9)** car (4 ; 8 ; 8), (4 ; 9 ; 7) ... sont à éliminer, avec 5 comédiens, on obtient les solutions **(5 ; 6 ; 9)** et **(5 ; 7 ; 8)** car (5 ; 11 ; 4), (5 ; 10 ; 5) ... sont à éliminer, avec 6 comédiens, il n'y a plus de solutions car (6 ; 12 ; 2), (6 ; 11 ; 3) ... (6 ; 7 ; 7) sont à éliminer.
- Ou : faire l'inventaire de toutes les décompositions de 20 en somme de trois termes différents ordonnés du plus petit au plus grand (1 + 2 + 17 ; 1 + 3 + 16 ; ... ; **3 + 8 + 9** ; 4 + 5 + 11 ; **4 + 6 + 10** ; **4 + 7 + 9** ; **5 + 6 + 9** et **5 + 7 + 8** et choisir celles où il n'y a pas plus de 6 de différence entre le petit et le grand terme.
- Exprimer la réponse dans le contexte donné : il y a 5 répartitions possibles (comédiens, danseurs, musiciens) : (3 ; 8 ; 9), (4 ; 6 ; 10), (4 ; 7 ; 9) (5 ; 6 ; 9) et (5 ; 7 ; 8).

**Attribution des points**

- 4 Les 5 répartitions correctes (voir ci-dessus) sans autre répartition et avec une méthode apparente
  - 3 Les 5 répartitions correctes avec, en plus, au maximum deux répartitions inexactes qui respectent cependant l'ordre et le nombre total d'élèves  
ou les 5 répartitions correctes, sans autres incorrectes, mais sans explications (au hasard, sans organisation)  
ou 4 répartitions correctes, sans répartition supplémentaire incorrecte
  - 2 3 ou 4 répartitions correctes avec d'autres répartitions inexactes qui respectent l'ordre et le nombre total d'élèves  
ou 3 répartitions correctes sans répartition incorrecte  
ou seulement les 2 répartitions (3 ; 8 ; 9) et (4 ; 6 ; 10) ; où les enfants ont compris « six de différence exactement » au lieu de « 6 de différence au maximum »
  - 1 de 1 à 3 répartitions correctes avec d'autres répartitions incorrectes
  - 0 Incompréhension du problème
-

**8. QUE D'ŒUFS ! QUE D'ŒUFS ! - EIER IN HÜLLE UND FÜLLE !** (Cat. 5, 6, 7)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissance**

- Arithmétique : division, quotients et restes, multiplication, puissances

**Analyse de la tâche**

- Comprendre les emboîtements successifs obtenus en groupant les œufs par boîte de 6, puis les boîtes par cartons de 6 et enfin les cartons par caisse de 6.
- Comprendre qu'il y a des emballages qui ont été réalisés et qu'on ne voit plus à la fin.
- Utiliser une procédure progressive : 6 œufs donnent une boîte, 6 boîtes donnent un carton (soit 36 œufs utilisés), 6 cartons donnent 1 caisse (donc on a utilisé 216 œufs). Il reste 784 œufs ... pour lesquels on reprend le processus.

Ou, utiliser une procédure par divisions successives par 6 en interprétant le quotient comme le nombre d'emballages « supérieurs » et le reste comme le nombre d'œufs ou d'emballages « inférieurs ».

Ou, calculer qu'une caisse contient  $6 \times 6 \times 6 = 216$  œufs et un carton  $6 \times 6 = 36$  œufs, puis diviser 1000 par 216, on trouve 4 (donc 4 caisses) avec un reste de 136 (œufs), puis diviser 136 par 36, on trouve 3 (cartons) avec un reste de 28 œufs qui remplissent 4 boîtes de 6 et il reste 4 œufs non emballés.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (4 caisses, 3 cartons, 4 boîtes, 4 œufs) avec explications claires
  - 3 Réponse correcte sans explication  
ou oubli des 4 œufs qui restent (les autres réponses correctes) ou une seule erreur de calcul, avec explication correcte
  - 2 Démarche correcte avec plus d'une erreur de calcul  
ou réponse ( 4 caisses, 27 cartons, 166 boîtes, 4 œufs) où ont été comptés tous les emballages réalisés successivement (tenant compte aussi de ceux qu'on ne voit plus)
  - 1 Début de recherche correcte (partage par 6 ou au moins le calcul des 216 œufs d'une caisse)
  - 0 Incompréhension du problème
-



**9. LE DEUXIÈME CHAPITRE - DAS ZWEITE KAPITEL (Cat. 5, 6, 7)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : les opérations et leurs propriétés, la numération

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que les numéros des pages du deuxième chapitre sont des nombres qui se suivent, que leur somme est 98, qu'ils ne doivent pas commencer par 1 (il y a un premier chapitre).
- Faire quelques essais à partir d'une hypothèse sur la première page du deuxième chapitre et vérifier si l'on arrive à 98 en additionnant les numéros des pages successives. Par exemple si l'on pense que la première page est 17, additionner successivement 18 (35), 19 (54), 20 (74), 21 (95), 22 (117) ceci permet de constater qu'on a dépassé 98 sans y passer.
- Dresser un inventaire systématique par hypothèses successives à partir de 3, 4, 5, ... comme première page du deuxième chapitre. (Avec l'hypothèse « 3 », on additionne  $3 + 4 + 5 + \dots$  et l'on vérifie que l'on n'atteint pas 98) Cette méthode est longue et un peu fastidieuse mais avec la calculatrice et une répartition des essais au sein du groupe, elle peut aboutir.

Ou organiser les essais à partir de 98 pages et d'une estimation par divisions successives du nombre situé au milieu de la suite. Par exemple si l'on considère un chapitre de deux pages, on voit que 49 est la moitié de 98 mais que ni 49 + 50 ni 48 + 49 ne peuvent conduire à 98.

Avec trois pages, on imagine un nombre au centre de la suite et proche du tiers de 98 :  $32 + 33 + 34 = 99$  ou  $31 + 32 + 33 = 96$  montrent qu'on n'arrive pas à 98.

C'est avec 4 pages qu'on arrive à la première solution : le quart de 98 se situe entre 24 et 25, ces deux nombres pourraient être au centre de la suite de 4 nombres consécutifs ; et effectivement  $23 + 24 + 25 + 26 = 98$

On élimine ensuite les hypothèses sur 5 et sur 6 pages pour constater qu'avec 7 pages on arrive à une deuxième solution  $98 : 7 = 14$  donne :  $(11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 98)$

Puis il faudra éliminer les hypothèses allant de 8 à 11 pages. A partir de 12 il n'y a plus de solution, car la somme de 12 nombres consécutifs commençant par 3 dépasse déjà 98 ( $3 + 4 + \dots + 14 = 102$ ).

Ou, utiliser (plus ou moins consciemment) des propriétés des opérations, par exemple :

- comme 98 est pair, il ne peut pas être la somme de deux nombres consécutifs (dont l'un est pair et l'autre impair) mais il peut être la somme de quatre nombres consécutifs comme le sont les nombres pairs non multiples de 4 :  $6 (0 + 1 + 2 + 3)$  ;  $10 (1 + 2 + 3 + 4)$  ;  $14 (2 + 3 + 4 + 5)$  ; 18 ; 22, ...
- comme 98 n'est pas un multiple de 3 il ne peut pas être la somme de trois nombres consécutifs (le triple du nombre du milieu, le petit valant un de moins et le grand un de plus) ;
- 98 est un multiple de 7, c'est la somme d'une suite de 7 nombres consécutifs dont  $14 = 97 : 7$  est la « moyenne ».

**Attribution des points**

- 4 La réponse correcte et complète (quatre pages de 23 à 26 et sept pages de 11 à 17) avec explications (addition) et traces montrant que d'autres essais ont été effectués et qu'il n'y a pas d'autre solution.
  - 3 La réponse correcte et complète mais sans évoquer la non-existence d'autres solutions, comme si les deux solutions avaient été trouvées au hasard  
ou les deux solutions correctement expliquées et une troisième due à une erreur de calcul
  - 2 Une des deux solutions avec le détail des calculs (vérification) l'autre n'est pas trouvée ou contient une erreur de calcul
  - 1 Traces de démarches qui n'aboutissent pas à 98
  - 0 Incompréhension du problème
-

**10. CLOUS ET FILS ÉLASTIQUES - NÄGEL UND GUMMIBÄNDER** (Cat. 5, 6, 7)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

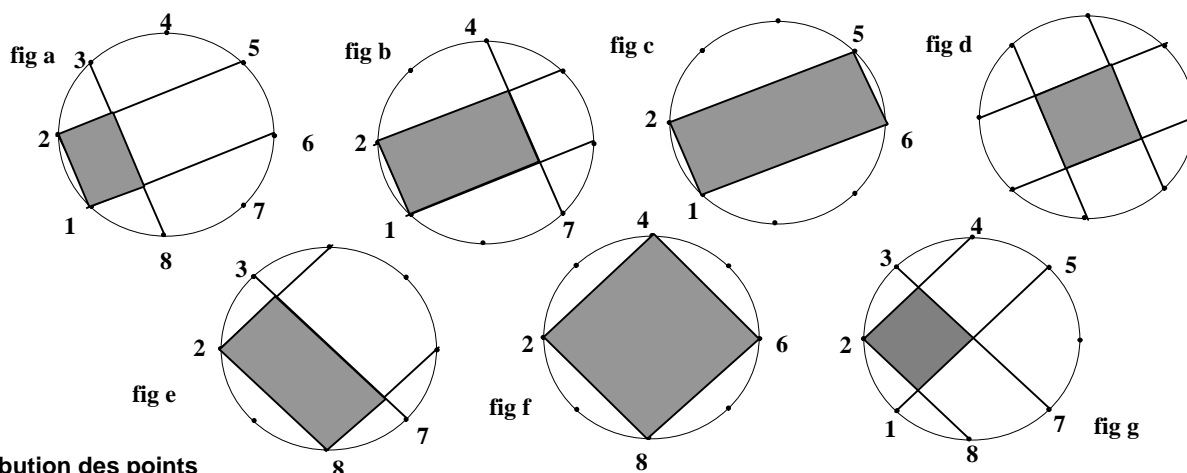
- Géométrie : reconnaissance de rectangles en tenant compte de leurs propriétés

**Analyse de la tâche**

- Percevoir les positions des clous sur le cercle et imaginer les isométries qui déterminent les positions relatives des clous et des fils qui les relient. Par exemple un fil tendu entre deux clous voisins se retrouve sur un fil tendu sur les deux clous opposés après une rotation d'un demi-tour, ce qui permet de savoir que ces fils sont parallèles, des rotations d'un quart de tour font apparaître des diamètres perpendiculaires, ...
- Comprendre que pour construire les rectangles possibles, il est nécessaire de faire intervenir le parallélisme et l'isométrie des côtés opposés et la perpendicularité des côtés adjacents.
- Procéder par essais non organisés, avec le risque de ne pas trouver toutes les solutions.

Ou chercher une méthode systématique. Par exemple, un inventaire des clous supportant des fils parallèles :

- pour deux clous voisins de la figure **a** (1 et 2), il y a trois autres paires de clous qui déterminent la même direction (3 et 8), (4 et 7), (5 et 6), ce qui permet de déterminer les quatre rectangles des figures **a**, **b**, **c** et **d**, dont la longueur d'un côté est la distance de 1 à 2.
- pour deux clous séparés par un autre, (8 et 2) de la figure **e**, il y a deux autres paires de clous qui déterminent la même direction (3 et 7), (4 et 6), ce qui permet de déterminer les deux rectangles des figures **e** et **f**, dont la longueur d'un côté est la distance de 2 à 8. Avec une paire de côtés de cette direction, la combinaison avec les paires de perpendiculaires fait apparaître encore un autre rectangle (carré de la figure **g**) dont le côté vaut la moitié de la distance de 2 à 8.
- Contrôler que les rectangles ainsi formés n'ont pas les mêmes dimensions. En particulier les carrés des figures **d** et **g** (car la distance de 1 à 2 est supérieure à la moitié de la distance de 8 à 2.)
- Dessiner les sept solutions (dont trois sont des carrés).

**Attribution des points**

- 4 Les sept solutions correctes sans autres solutions isométriques
- 3 Six solutions correctes sans autre solution isométrique  
ou les sept solutions correctes avec une solution isométrique à l'une des précédentes
- 2 Quatre ou cinq solutions correctes sans autre solution isométrique  
ou cinq ou six solutions correctes plus une solution isométrique à l'une des précédentes  
ou les sept solutions correctes plus un quadrilatère qui n'est pas un rectangle
- 1 De une à trois solutions avec ou sans solutions isométriques  
ou quelques solutions correctes et un quadrilatère qui n'est pas un rectangle.
- 0 Quadrilatères non rectangles ou incompréhension du problème

**11. PIÈCES DE MONNAIE - GELDMÜNZEN** (Cat. 6, 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : addition, multiplication, équivalence
- Algèbre (équation)

**Analyse de la tâche**

- Comprendre l'énoncé et les quatre données essentielles : la somme initiale est supérieure à 8 euros et inférieure à 10 euros, composée de pièces de 1 euro et de pièces de 20 centimes ; la somme finale est égale à la moitié de la somme initiale, composée de manière inversée entre pièces de 1 € et pièces de 20 centimes.
- Procéder par essais (systématiques ou non) de nombre de pièces de 1 € et de 20 centimes donnant une somme comprise entre 8 et 10 €, inverser la composition des pièces et vérifier si la somme obtenue représente bien la moitié de la somme initiale

Ou, procéder par essais de nombre de pièces de 1 € et de 20 centimes donnant une somme entre 4 et 5 euros ; inverser la composition des pièces et vérifier si la somme obtenue représente bien le double de la somme finale.

Ou, procéder par essais à partir de la somme initiale en se limitant à considérer les cas où une telle somme et sa moitié peuvent s'exprimer avec des pièces de 1 euro ou 20 centimes (en excluant des sommes comme 9,90, ou 9,80). Il reste quatre possibilités: 8,40 ; 8,80 ; 9,20 et 9,60. Se rendre compte que seules 9,60 et sa moitié, 4,80, peuvent être obtenues en intervertissant les nombres de pièces (9 de 1 € et 3 de 20 centimes deviennent 3 de 1 € et 9 de 20 centimes).

(Si l'on se rend compte que la somme obtenue après inversion des pièces est inférieure à 5 € on en déduit qu'elle est formée au plus 5 pièces de 1 € et la somme initiale contient donc au plus 5 pièces de 20 c (soit 1 €). Elle contient donc au moins 7 pièces de 1 €. Il y a alors peu d'essais à faire dans les procédures ci-dessus.)

Ou : mettre le problème en équation : si  $x$  et  $y$  désignent respectivement les nombres (entiers) de pièces de 1 € et de 20 centimes, on aboutit à :  $8 < x + 0,2y \leq 10$  et  $x + 0,2y = 2(y + 0,2x)$ , ce qui conduit à  $x = 3y$ .

puis, par essais systématiques constater que parmi les quatre couples (3 , 1) ; (6 , 2) ; (9 , 3) ; (12 , 4), seul le troisième est à envisager car il conduit à une somme de 9,60 €.

**Attribution des points**

- 4 Solution correcte, avec démarche apparente et expliquée (9,60 €) qui montre clairement l'unicité de la solution (où figurent les divers essais effectués)
  - 3 Solution correcte, avec explications incomplètes, sans vérification de l'unicité
  - 2 Solution vérifiant l'une des conditions, sans que l'autre soit vérifiée
  - 1 Début de recherche cohérente, mais n'aboutissant pas
  - 0 Incompréhension du problème
-

**12. PYRAMIDE IRRÉGULIÈRE - UNREGELMÄßIGE PYRAMIDE (Cat. 6, 7, 8)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Géométrie : géométrie dans l'espace et construction d'un patron, équivalence de longueurs de côtés

**Analyse de la tâche**

- Imaginer mentalement la construction de la pyramide par pliage selon les arêtes : les trois faces triangulaires qui se relèvent et concourent sur le sommet de la pyramide, laissant encore un trou. Ou découper effectivement le patron non terminé et plier les trois faces données pour se rendre compte des caractéristiques du « trou » triangulaire.
- Comprendre alors que certains côtés de triangles sont de même longueur puisqu'ils deviennent communs lorsque la pyramide est construite.
- En déduire que le quatrième triangle a un côté sur la largeur du rectangle, un côté égal à son voisin du triangle supérieur et l'autre égal à son voisin du triangle de droite. ( $a$  et  $b$  sur la figure 1)
- Construire ce dernier triangle par report des côtés au compas ou par mesurage et constater qu'il est rectangle, avec un angle droit sur la base (comme le triangle de gauche).
- Imaginer ou effectuer les mouvements des sommets des triangles lorsqu'on passe du patron à la réalisation de l'objet en trois dimensions, lorsque la base reste dans un plan horizontal (souvent le plan de la feuille posée sur la table) : les sommets des triangles rectangles de gauche et de droite restent dans le plan vertical contenant une arête de la base ; ils se retrouveront donc au-dessus de cette arête, la position sur l'arête pouvant être déterminée par le plan dans lequel se déplacent les deux sommets des autres faces. Comprendre alors qu'on ne voit que trois faces de la pyramide lorsqu'on la regarde du haut.
- Expliquer comment a été construit le quatrième triangle et dessinez la pyramide vue de dessus, soit par estimation visuelle ou par construction géométrique (Voir figure 2)

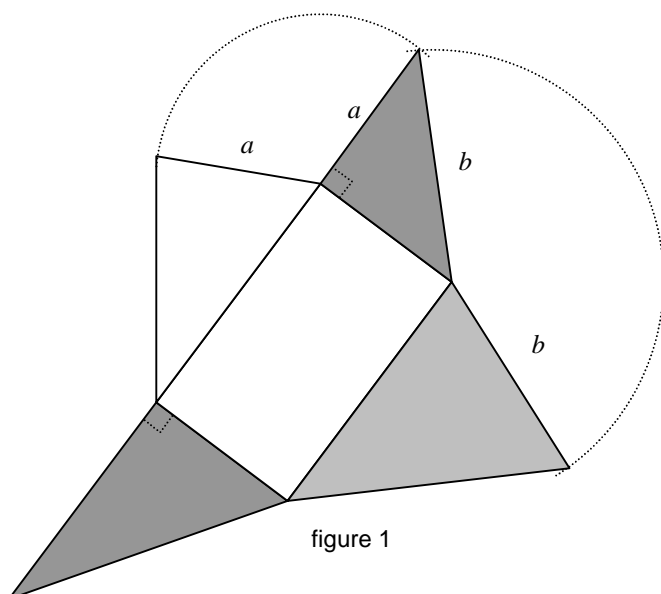


figure 1

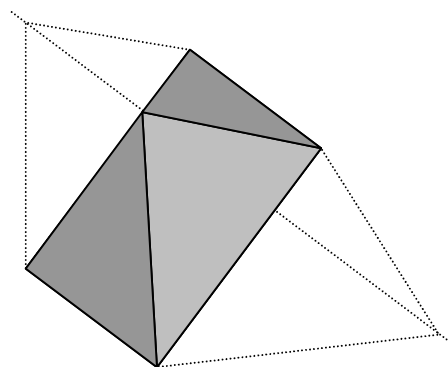


figure 2

**Attribution des points**

- 4 Une construction correcte de la dernière face, où l'on comprend que les côtés du dernier triangle et des côtés des triangles « latéraux » sont égaux (par mesure des côtés ou par construction géométrique avec arcs de cercles ou par des dessins obtenus par ajustements successifs), où l'on voit que cette face est un triangle rectangle (sans juger de la qualité ou la précision du dessin)  
et la réponse « 3 » pour le nombre de faces visibles, avec un dessin ou une esquisse (sans exiger la précision de la construction mais permettant de se rendre compte que le sommet est au-dessus d'un côté de la base)
3. Une construction correcte du triangle, avec un dessin peu précis de la pyramide ne permettant pas d'arriver à la réponse « 3 » avec certitude  
ou la réponse « 3 » avec un dessin correct de la pyramide et une construction approximative de la face triangulaire (on ne perçoit pas qu'il est rectangle ou que ses côtés sont isométriques à ceux des faces voisines)
- 2 Les deux constructions approximatives : la pyramide ne permettant pas d'arriver à la réponse « 3 » avec certitude et la face triangulaire dont on ne perçoit pas qu'il est rectangle ou que ses côtés sont isométriques à ceux des faces voisines,  
ou construction et justification correcte pour une seule des demandes
- 1 Dessins et explications approximatifs pour une des deux demandes
- 0 Incompréhension du problème

**13. LA BOÎTE DE VIGNETTES - STICKERSAMMLUNG** (Cat. 6, 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : divisibilité, numération, multiples communs

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que, comme il s'agit d'un nombre élevé d'objets, il est improductif de travailler par manipulation ou dessins, et qu'il est préférable de recourir à des écritures de nombres et de relations numériques.
- Trouver une méthode d'élimination ou de choix qui évite d'effectuer trop de divisions et de calculs de restes. Par exemple :

Retenir les nombres qui se terminent par 3 et 8 (parce que leur reste est 3 dans une division par 5) ; éliminer les nombres pairs (le reste est 1 dans une division des nombres cherchés par 2) et conclure que les nombres cherchés se termineront par 3. Ne retenir que les multiples de 3 (troisième condition) et se limiter à examiner seulement 1323, 1353, 1383, 1413, 1443 et 1473. Parmi ceux-ci, vérifier ceux dont le reste est 4 dans une division par 7 et trouver que seul 1383 satisfait cette condition. ( $1383 = 197 \times 7 + 4$ )

Ou : écrire les multiples de 7 augmentés de 4 de 1300 à 1500, (1306, 1313, 1320, ...), éliminer les nombres pairs et ne retenir que ceux qui se terminent par 3 (1313, 1383, 1453) pour ne conserver que 1383 qui est multiple de 3.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (1383) avec les détails d'une recherche systématique (qui montre l'unicité de la solution)
  - 3 Réponse correcte avec les détails d'une recherche non exhaustive (sans être sûr de l'unicité de la solution)
  - 2 Réponse correcte sans explication ou détails ou avec seulement une vérification  
ou une erreur de calcul avec les détails d'une recherche systématique
  - 1 Début de recherche, non systématique
  - 0 Incompréhension du problème
-

**14. LA BIBLIOTHÈQUE - DER BÜCHERSCHRANK (Cat. 7, 8)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : divisions et multiplications (suite de nombres en progression géométrique de raison 2)
- Algèbre : expressions littérales

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que la relation entre les livres rangés par Jeanne et par Luc sur chaque rayon est aussi valable pour l'ensemble de la bibliothèque. Donc le nombre des livres rangés par Luc est le tiers des livres, c'est-à-dire 124.
- Comprendre que s'il a mis  $n$  livres sur le premier rayon, il en a mis  $2n$  sur le deuxième,  $4n$  sur le troisième...
- Procéder par essais à partir de 1, 2, 3, ... nombres de livres de Luc sur le premier rayon, pour obtenir exactement un total de 124. On l'obtient 5 rayons en partant de 4 sur le premier rayon ( $4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124$ ). Le nombre d'essais peut être réduit si l'on se rend compte qu'il y faut un nombre pair de livres de Luc sur le premier rayon pour arriver à un total de 124. (Il faut rejeter l'essai à partir de 124 livres sur le premier rayon car, selon l'énoncé, il y a plusieurs rayons).

Ou, procéder par essais à partir du nombre de rayons : 2, 3, 4, ... en désignant par  $n$  le nombre de livres de Luc sur le premier rayon, ce qui amène à  $n + 2n + 4n + 8n + 16n = 31n = 124$  et à  $124 : 31 = 4$ , et à la solution : 4 pour Luc et 8 pour Jeanne.

Ou : toujours en désignant par  $n$  le nombre de livres de Luc sur le premier rayon, on trouvera  $3n$  livres sur le premier,  $6n$ ,  $12n$ ,  $24n$  ... sur les suivants, pour une somme de  $3n(1 + 2 + 4 + \dots) = 372$ , ou  $n(1 + 2 + 4 + \dots) = 124$ . Remarquer que 124 n'a que 2, 4 et 31 comme diviseurs et que la somme  $1 + 2 + 4 + \dots$  est impaire, donc égale à 31.  $n = 4$  et comme  $31 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$ , il y a 5 rayons à la bibliothèque. Luc a donc disposé ses livres ainsi :  $4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124$  livres (le tiers de 372).

(Dans toutes les procédures décrites ci-dessus la variable peut être aussi bien le nombre de livres de Luc que le nombre total de livres sur le premier rayon.)

**Attribution des points**

- 4 Les deux réponses (5 rayons; Luc: 4-8-16-32-64) avec explications complètes
  - 3 Les deux réponses avec explications incomplètes ou peu compréhensibles
  - 2 Une des deux réponses, avec quelques explications  
ou les deux réponses sans explications
  - 1 Début cohérent de recherche
  - 0 Incompréhension du problème.
-

**15. LA CUEILLETTE DE CHAMPIGNONS - BEIM PILZESAMMELN (Cat. 8)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : les quatre opérations (et les opérations « inverses »)
- Algèbre : équations du premier degré

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il faut faire un raisonnement par hypothèses.
- Procéder par essais organisés (considérant par exemple que le nombre de champignons de Fabienne doit être pair et multiple de 4 et vérifier chaque fois que toutes les conditions sont respectées)

Ou: partir de 14 (proche de  $57 : 4$ ) comme nombre de champignons cueillis par chacun et vérifier qu'on obtiendrait ainsi plus de champignons que 57 ( $((14 - 1) + (14 + 4) + 7 + 28 = 66)$ ); procéder ensuite par ajustements successifs à partir de nombres pairs (le double de ceux ramassés par Michel) et trouver qu'avec 12 toutes les conditions sont respectées. ( $((12 - 1) + (12 + 4) + 12 : 2 + 12 \times 2 = 57)$ ).

Ou : procéder par voie algébrique. Il y a alors plusieurs choix possibles de l'inconnue mais on aboutit à des équations du premier degré de même difficulté. Par exemple si  $x$  est le nombre de champignons que chacun aurait trouvé on a alors  $(x - 1) + (x + 4) + 2x + (1/2)x = 57$ . On peut aussi désigner par  $x$  le nombre de champignons ramassés par l'un des amis pour arriver à une équation du genre :  $(2x - 1) + (2x + 4) + x + 4x = 57$  où  $x$  est le nombre de champignons ramassés par Michel, etc.

(On peut aussi arriver à ces équations à partir des égalités:  $a + 1 = p - 4 = 2m = f/2$ , où  $a, p, m, f$  sont les nombres de champignons ramassés par Antonio, Patricia, Michel et Fabienne.)

- Trouver dans chaque cas que Antonio a ramassé 11 champignons, Patricia 16, Michel 6 et Fabienne 24.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (Antonio 11, Patricia 16, Michel 6 et Fabienne 24) avec explication claire et cohérente
  - 3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire
  - 2 Réponse qui respecte les quatre hypothèses mais pas le total de 57 ; par exemple 13, 18, 7, 28 (où chacun aurait cueilli 14 champignons)  
ou réponse correcte sans aucune explication ou avec seulement une vérification
  - 1 Début de raisonnement correct
  - 0 Incompréhension du problème
-

**16. LE RETOUR DE MOMBO TAPIE - ORIKELIM UND SEINE TEPPICHE (Cat. 8)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Géométrie : carré, aire et périmètre
- Arithmétique : opérations, carrés, rapports
- Fonctions : suites et examen des variations d'une fonction de variable discrète
- Algèbre. calcul littéral d'expressions du second degré ; équations et inéquations du deuxième degré

**Analyse de la tâche**

- Imaginer les tapis de la sorte donnée et en dessiner quelques-uns, parmi les plus simples.
- Comprendre les relations arithmétiques entre les nombres de carrés gris, le nombre de carrés blancs et le nombre de carrés sur un côté du tapis. Par exemple (en langage ordinaire) : le nombre de carrés gris est quatre fois le nombre de carrés sur le côté du tapis, moins les quatre carrés des angles qui seraient comptés deux fois ; et le nombre de carrés blancs est le nombre de carrés sur le côté du tapis, moins deux, puis élevé au carré.
- Noter les nombres de carrés de chaque couleur pour quelques tapis, puis se rendre compte qu'il faut en dresser un inventaire systématique (voir exemples suivant :)
- Prendre en compte les demandes des clients et, par conséquent, calculer le rapport « carrés blanc / nombre total » pour voir les modèles qui conviennent.

Une analyse des rapports passe par la prise de conscience de leur croissance en fonction du nombre de carrés sur le côté : les tapis deviennent « de plus en plus clairs » car la partie blanche du centre croît plus rapidement que la bordure grise. On peut ainsi aboutir à un inventaire de ce genre, qui se limite aux modèles à envisager :

carrés par côté	carrés gris	carrés blancs	carrés du tapis	blancs/ total
3	$8 (= 3 \times 4 - 4)$	$1 = (3 - 2)^2$	$9 = 3^2$	$1/9 = 0,11...$
...	...	...	...	...
6	$20 (= 6 \times 4 - 4)$	$16 = (6 - 2)^2$	$36 = 6^2$	$16/36 = 4/9 = 0,44...$
7	24	25	49	<b><math>25/49 = 0,51...</math></b>
...	...	...	...	...
10	36	64	100	$0,64 < 2/3$
11	40	81	121	<b>0,669...</b>
12	44	100	144	<b>0,694...</b>
13	48	121	169	<b>0,715...</b>
14	52	144	196	<b>0,734...</b>
15	56	169	225	$0,751... > 3/4$
16	60	196	256	0,765..

- Dédurre de l'observation de la croissance des rapports « nombre de carrés blancs/nombre total de carrés » (que la demande de M. Ronay (Herr Fransen) ne pourra être satisfaite et que Mme Gratin (Frau Pingelig) pourra choisir entre les modèles de 11 à 14 carrés de côté.

Ou, par l'algèbre, le problème consiste à envisager les nombres de carrés gris, blanc ... en fonction du nombre  $n$  de carrés sur un côté. Par exemple : carrés gris :  $4n - 4$  ou  $4(n - 1)$  ; carrés blancs  $(n - 2)^2$ , nombre total :  $n^2$  ; rapport blanc/total :  $(n - 2)^2 / n^2$ . On obtient une impossibilité pour la demande de M. Ronay (Herr Fransen), car cela supposerait

$[n / (n - 2)]^2 = 2$  dont la racine carrée est irrationnelle. Celle de Mme Gratin (Frau Pingelig) conduit aux inéquations du deuxième degré  $8n^2 < 12(n - 2)^2 < 9n^2$  donnant les solutions 11, 12, 13, ou 14, obtenues par un tableau tel que le précédent.

**Attribution des points**

- 4 Réponse exacte (pas de tapis pour M. Ronay (Herr Fransen), des tapis de 11, 12, 13 ou 14 carrés par côté pour Mme Gratin (Frau Pingelig)) avec explications correctes
- 3 Réponse exacte pour chaque client avec explications partielles ou peu compréhensibles
- 2 Réponse exacte pour un client avec explication ou réponse exacte pour les 2 clients mais sans explications
- 1 Calculs à propos de quelques tapis seulement
- 0 Incompréhension du problème.



**17. ALADIN ET LE TRÉSOR D'ALI BABA - ALADIN UND ALI BABAS SCHATZ (Cat. 8)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Logique, raisonnement hypothético-déductif

**Analyse de la tâche**

- Raisonner à partir d'hypothèses sur la réponse obtenue et sur les comportements des deux personnages et constater que l'on peut conclure en fonction de cette réponse :
    - Si la réponse est « oui », et si le gardien du sentier jaune est menteur, alors le gardien du sentier rouge, qui est celui qui dit la vérité, répondrait « non ». Il faut donc qu'Aladin continue sur le sentier jaune.
    - Si la réponse est « oui », et si le gardien du sentier jaune dit la vérité, alors le gardien du sentier rouge, qui est le menteur, dirait « oui ». Ce gardien ne serait donc pas sur le sentier du trésor et il faut donc qu'Aladin continue sur le sentier jaune.
    - Si la réponse est « non », et si le gardien du sentier jaune est le menteur, alors le gardien du sentier rouge, qui est celui qui dit la vérité, répondrait « oui », il faut donc qu'Aladin change de sentier.
    - Si la réponse est « non », et si le gardien du sentier jaune est celui qui dit la vérité, alors le gardien du sentier rouge, qui est le menteur, dirait « non », il faut donc qu'Aladin change de sentier.
  - Se rendre compte que pour chacune des réponses « oui », Aladin doit continuer sur le sentier jaune et que, en cas de réponse « non », il doit changer de sentier.
- Ou, comprendre que la réponse obtenue est le résultat d'un mensonge et d'une vérité, quel que soit leur ordre. Elle est donc un mensonge. Si c'est « oui », il faut comprendre « non » et rester sur le sentier jaune, si c'est « non », il faut comprendre « oui » et changer de sentier.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (oui : rester sur le sentier jaune, non : changer de sentier), avec une explication claire et complète
  - 3 Réponse correcte avec explications confuses
  - 2 Un raisonnement basé sur une hypothèse, seulement pour le « oui » ou seulement pour le « non » mais qui ne conclut pas
  - 1 Un début de raisonnement hypothético-déductif basé sur d'autres hypothèses
  - 0 Incompréhension du problème
-