

**1. LE CODE DE L'IMMEUBLE - DAS TÜRSCHLOSS (Cat. 3, 4)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : multiplication
- Logique et combinatoire

**Analyse de la tâche**

- Comprendre comment se construisent les codes : deux lettres, ordonnées, la seconde étant différente de la première.  
Exclure ainsi les codes avec répétitions comme AA et comprendre que AB est un code différent de BA.
- Organiser la recherche de tous les codes différents pour être certain de les trouver tous, sans répétitions :
  - listes de codes d'abord au hasard, puis recherche d'éventuels doublons ou codes manquants ;
  - listes ordonnées avec, éventuellement, l'utilisation d'outils de représentation comme les tableaux, arbres ou autres types de diagrammes.

Ou, utilisation d'un raisonnement de type combinatoire, par exemple :

- il y a 6 choix pour la première lettre et, pour chaque choix d'une première lettre, il en reste 5 pour la deuxième, ce qui conduit à  $6 \times 5 = 30$  codes différents.
  - il y a 36 assemblages possibles ( $6 \times 6 = 36$ ), mais il faut enlever les 6 assemblages avec répétition de lettre soit 30 codes ( $36 - 6 = 30$ ).
- Constater que les 30 codes possibles de deux lettres ne suffiront pas pour les 35 appartements et répondre « non » à la question.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte « Non » avec une explication où les 30 possibilités sont justifiées par une liste (organisée ou non) ou par la multiplication  $5 \times 6$  ou par le calcul  $6 \times 6 - 6$
- 3 Réponse « Non » en annonçant un nombre de codes allant de 27 à 33, avec une liste comportant des oublis ou des répétitions  
ou réponse « Non » mentionnant les 30 possibilités mais sans autre explication
- 2 Même réponse que pour 3 points, annonçant un nombre de codes allant de 27 à 33, (différent de 30) mais sans explication ni liste justificative ou réponse « Non » et 15 possibilités avec oubli des inversions mais avec liste justificative  
ou réponse « Oui » avec l'explication qu'il y a 36 possibilités (avec les cas où les lettres sont répétées), avec explications
- 1 Réponse « Non » sans aucune explication  
ou inventaires incorrects allant de 20 à 26 ou de 34 à 40 codes
- 0 Incompréhension du problème ou réponse « Oui » sans autre explication ou inventaires très incomplets

**2. LES SEPT NAINS SE PÈSENT - DIE SIEBEN ZWERGE AUF DER WAAGE (Cat. 3, 4)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : addition

**Analyse de la tâche**

- Appropriation du problème : les sept poids, le fait que lorsque deux nains sont ensemble sur la balance, elle indique la somme de leurs deux poids.
- Comprendre qu'il faut trouver, parmi les 7 nombres correspondant aux poids des 7 nains, trois couples dont la somme est égale.
- Additionner deux à deux les nombres donnés pour y trouver trois sommes égales. Cette recherche peut être organisée de manière plus ou moins efficace : à partir d'une somme de deux nombres, voir si on retrouve la même avec deux des cinq autres nombres : essais de sommes organisés (par exemple en commençant par additionner le plus petit poids avec le plus grand...) ; on peut aussi envisager une « table d'addition » des 7 nombres et trouver parmi les 21 résultats de la table  $[(7 \times 6) : 2]$  celui qu'on retrouve trois fois.  
Lorsqu'on a découvert que  $33 = 11 + 22 = 16 + 17 = 14 + 19$ , le « 24 » reste seul. En déduire qu'il s'agit du poids de Grincheux.
- Ou, (solution peu probable à ce niveau), ajouter tous les poids (résultat 123 kg), remarquer que ce nombre est divisible par 3 et qu'en enlevant de ce total le poids de Grincheux il faut obtenir un résultat lui aussi divisible par 3. Le poids de Grincheux doit donc être divisible par 3, ce qui n'est le cas que pour le nombre 24.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte « Grincheux pèse 24 kilos » ou « 24 kg » avec une explication montrant les trois sommes égales, composées de six termes, et le nombre « isolé »
- 3 Réponse correcte « Grincheux pèse 24 kilos » ou « 24 kg » avec une explication incomplète ou peu claire
- 2 Réponse « Grincheux pèse 24 kilos » ou « 24 kg » sans explication
- 1 Début de recherche : deux couples de même somme sont trouvés (par exemple  $17 + 19 = 22 + 14 = 36$ )
- 0 Incompréhension du problème

### 3. UNE PARTIE DE DÉS - WÜRFELSPIEL (Cat. 3, 4)

#### ANALYSE A PRIORI

##### Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et soustraction
- Logique : déduction

##### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'à chaque lancer, il faut additionner les points des deux dés.
- Se rendre compte que, lorsqu'elle aborde le dernier tour, Monica a totalisé 9 ( $52 - 43 = 9$ ) points de moins que Alberto, qui, lui a fini de jouer.
- En déduire que, pour gagner, Monica doit obtenir un nombre de points supérieur ou égal à 10. (Si elle obtient 9 points, ils seront ex-aequo et Monica n'aura pas gagné).
- Dresser alors l'inventaire des possibilités de points sur le dé visible pour que Monica ne gagne pas (total de moins de 10 points sur les deux dés) ou pour qu'elle gagne (avec un total de 10, 11 ou 12 points sur les deux dés) :
  - si c'est 6, Monica ne gagne pas si le dé invisible porte 3, 2 ou 1, mais gagnerait si ce dé porte 4, 5 ou 6,
  - si c'est 5, Monica ne gagne pas si le dé invisible porte 4, 3, 2 ou 1 ; mais gagnerait si ce dé porte 5 ou 6,
  - si c'est 4, Monica ne gagne pas si le dé invisible porte 5, 4, 3, 2 ou 1 ; mais gagnerait si ce dé porte 6,
  - si c'est 3, 2 ou 1 Monica ne peut pas gagner puisqu'elle ne marquerait qu'au plus 9 points.

En déduire que Alberto a vu 1, 2 ou 3 sur le dé visible.

Ou, raisonnements du genre des précédents, mais en essayant différentes sommes qu'il est possible d'obtenir avec 2 dés (de 2 à 12) et en retenant celles qui sont inférieures à 10).

##### Attribution des points

- 4 Les trois possibilités (1, 2 ou 3) avec explications (la limite de 10 points et un inventaire des possibilités qui ne permettent pas d'atteindre cette limite)
- 3 Les trois possibilités (1, 2 ou 3) avec explications incomplètes ou peu claires
- 2 Les trois possibilités (1, 2 ou 3) sans aucune explication  
ou réponse 1 et 2 avec explications qui montrent une confusion entre gagné et égalité
- 1 Début de raisonnement montrant qu'il faut que Monica fasse au moins 10 points pour gagner ou au plus 9 points pour perdre
- 0 Incompréhension du problème

#### 4. FOURMIS SUR UN FILET - AMEISEN IM NETZ (Cat. 3, 4, 5)

##### ANALYSE A PRIORI

##### Domaine de connaissances

- Géométrie: recherche de parcours différents et optimaux

##### Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de déplacement de A à B et le comptage des nœuds d'après l'exemple.
- Comprendre que pour effectuer un trajet comprenant le moins de nœuds possible, il faut passer de A à B le plus directement possible, soit en allant à droite, soit en allant vers le bas et en déduire que le minimum est 3 nœuds intermédiaires (ou 5 nœuds si on compte ceux de départ et d'arrivée), et que tous ces chemins ne font pas de "détours inutiles" en montant ou en allant vers la gauche.
- Essayer des chemins possibles et vérifier au fur et à mesure s'ils sont bien les plus courts (3 nœuds) et s'ils n'ont pas déjà été suivis (éliminer les doublons).

On structure sa recherche en choisissant un critère de déplacement, par exemple d'abord tous les chemins différents en commençant par aller sur un nœud vers la droite, puis deux nœuds vers la droite, puis un nœud vers le bas, puis deux nœuds vers le bas.

- Constater qu'il n'y a que six chemins possibles qui ne suffiront pas pour les sept jours de la semaine.
- Répondre « non » à la question et, pour l'expliquer, dessiner les six chemins possibles différents sur les filets préparés:

è è è è ; è è è è ; è è è è ; è è è è ; è è è è ; è è è è .

##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte : « non, car il n'y a que 6 chemins différents » avec les dessins des six chemins différents de trois nœuds
- 3 Réponse correcte « non, il n'y a que 6 chemins différents (de trois nœuds) » mais sans les dessins de tous les chemins
- 2 Réponse « non », avec 4 ou 5 chemins différents de trois nœuds dessinés (et aucun chemin incorrect) ou réponse « oui » avec 7 ou 8 chemins dont deux au plus erronés (plus de 3 nœuds ou chemins répétés)
- 1 Découverte de 2 ou 3 chemins différents corrects, de trois nœuds (et pas plus de deux chemins incorrects) ou réponse « non » sans dessin ni explication ni commentaires
- 0 Incompréhension du problème

## 5. QUEL BEAU DRAPEAU ! - DIE FAHNEN VON LUXOPOLIS ! (Cat. 3, 4, 5)

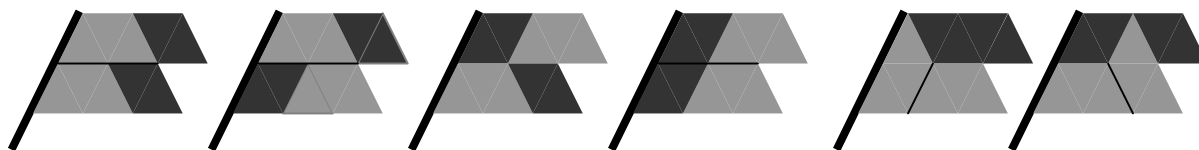
### ANALYSE A PRIORI

#### Domaine de connaissances

Géométrie : reconnaissance de formes et pavage

#### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut paver la forme de dix triangles du drapeau avec des pièces de 2 et de 3 triangles
- Comprendre qu'on peut éliminer le cas de trois pièces de 3 triangles car il ne resterait qu'un triangle, puis éliminer le cas d'une pièce de 3 car il resterait sept triangles, puis éliminer encore le cas où il n'y a pas de pièces de 3 car le dessin du drapeau empêche le pavage en cinq pièces de 2.
- Constater que la répartition ne peut être que de deux pièces de 3 et deux pièces de 2.
- Essayer de dessiner les quatre pièces, de façon plus ou moins organisée ou par découpages, et découvrir les six dispositions possibles.



- Conclure que les sept villes ne peuvent pas avoir chacune un drapeau différent et répondre « non » à la question en dessinant les six dispositions.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte : « non », avec dessin de 6 drapeaux différents
- 3 Réponse incomplète : « non », avec dessin de 4 ou 5 drapeaux différents  
ou réponse « oui » avec dessin de 7 drapeaux, les 6 corrects et un « doublon »  
ou réponse « non » avec dessin de 5 ou 6 drapeaux mais avec une répétition de deux drapeaux identiques
- 2 Réponse incomplète : « non », avec dessin de 2 ou 3 drapeaux différents, dessinés clairement sur la grille  
ou réponse « oui » avec dessin de plus de 7 drapeaux, les 6 corrects et plusieurs « doublons »  
ou réponse « non » avec dessin de 4 drapeaux mais avec une répétition de deux drapeaux identiques
- 1 Seulement 1 drapeau correct (avec éventuellement des drapeaux approximatifs, mais respectant les formes utilisables)
- 0 Incompréhension du problème

**6. LABYRINTHE ARITHMÉTIQUE - DAS ARITHMETISCHE LABYRINTH (Cat. 4, 5, 6)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : observation de régularités additives dans un tableau de nombres
- Géométrie : déplacements sur un réseau

**Analyse de la tâche**

- Considérer la disposition des nombres sur le tableau et chercher à comprendre, en les essayant, les règles qui permettent de passer d'une case à l'autre.
- Observer que, d'une case à une case adjacente de la même ligne (soit à droite soit à gauche), le nombre de la case d'arrivée est celui de la case de départ augmenté ou diminué de 1; que d'une case à une autre qui lui est verticalement contiguë, le nombre de la case d'arrivée est celui de la case de départ augmenté ou diminué de 5. Vérifier que si, par contre, deux cases ont un seul sommet commun (elles sont en diagonale), de l'une à l'autre, le nombre peut soit augmenter ou diminuer de 4 soit augmenter ou diminuer de 6.
- En tirer la conséquence que les déplacements qui satisfont aux conditions de l'énoncé sont ceux allant vers une case en bas à droite en diagonale (+ 6) ou ceux allant vers une case en haut à droite en diagonale (- 4)
- Dédire alors de l'observation du tableau qu'un chemin menant à 30 ne peut pas commencer :
  - par un nombre impair (on peut le justifier en termes arithmétiques parce qu'en ajoutant 6 ou en enlevant 4 à un nombre impair on obtient toujours un nombre impair),
  - par un nombre pair situé dans une case au-dessus de la diagonale (d) formée par les nombres 6, 12, 18, 24, 30.
- En déduire que les quatre nombres de départ possibles sont 6, 16 et 26 et 28  
 et qu'il y a un seul chemin à partir de 6 : **6** - 12 - 18 - 24 - 30  
 trois chemins à partir de 16 : **16** - 12 - 18 - 24 - 30 ; **16** - 22 - 18 - 24 - 30 ; **16** - 22 - 28 - 24 - 30  
 deux chemins à partir de 26 : **26** - 22 - 18 - 24 - 30 ; **26** - 22 - 28 - 24 - 30  
 et un seul chemin à partir de 28 : **28** - 24 - 30

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte et complète (les quatre cases de départ 6, 16, 26 et 28 avec au moins un chemin pour chacune)
- 3 Réponse correcte à la première question (6, 16, 26, 28) avec au moins un chemin décrit correctement ou réponse avec les quatre nombres et chemins corrects et un autre nombre d'entrée parmi 12, 18, 22, 24
- 2 Réponse correcte à la première question (6, 16, 26, 28) sans aucun chemin décrit ou quelques chemins incorrects  
ou réponse présentant 2 ou 3 des quatre nombres d'entrée corrects avec au moins un chemin correct
- 1 Début de recherche qui montre une compréhension des règles de construction des chemins
- 0 Incompréhension du problème

**7. DE 0 A 700 - VON 0 AUF 700 (Cat. 5, 6)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique: addition et multiplication

**Analyse de la tâche**

- Lire le texte et les exemples, comprendre qu'on pourrait arriver à 700 en 100 machines à additionner mais qu'il faut rechercher un chemin plus court.
- Constater qu'il faut commencer par une machine à additionner car la multiplication de 0 par 7 donne 0.
- Constater que, comme dans le deuxième exemple, une addition suivie immédiatement d'une multiplication conduit à 49 puis qu'une deuxième ou troisième multiplication trop hâtives conduiront au-delà de 100, puis au-delà de 700.
- Constater que  $100 \times 7 = 700$  mais que 100 n'est pas atteignable par des additions ou multiplications de (par) 7 ou que ce nombre est une limite pour la dernière multiplication.
- En conséquence, chercher à s'approcher de 100 et découvrir que 98 est accessible par des additions de 7 ou des multiplications par 7 :  $98 = 49 + 49 = 70 + 28 = 14 \times 7 = \dots$  et que, parmi ces décompositions,  $14 \times 7$  s'obtient aisément par  $(7 + 7) \times 7$ .
- En déduire que la suite la plus courte se compose de deux additions, suivies de deux multiplications, suivies de deux additions  $(0 + 7 + 7) \times 7 \times 7 + 7 + 7 = 700$  ou  $0 + 7 = 7, 7 + 7 = 14, 14 \times 7 = 98, 98 \times 7 = 686, 686 + 7 + 7 = 700$

Ou : travailler par essais et erreurs pour trouver la solution optimale

Ou : trouver une solution en douze opérations  $+7, \times 7, +7, +7, +7, +7 +7, +7, +7, \times 7 +7, +7$  ou en dix-sept opérations (quatorze additions, une multiplication et deux additions)

**Attribution des points**

- 4 Réponse optimale en 6 étapes avec détail des calculs  $(0 + 7 + 7) \times 7 \times 7 + 7 + 7 = 700$  ou suite de machines comme sur les exemples, ou suites d'opérations avec résultats intermédiaires
- 3 Réponse optimale en 6 étapes mais sans faire apparaître clairement les opérations
- 2 Réponse correcte (non optimale) en 12 ou 17 étapes ou suite aboutissant à 700 avec une seule erreur de calcul
- 1 Début de suites respectant les règles mais n'arrivant pas à 700 (entre 650 et 750)
- 0 Incompréhension du problème

## 8. LA FACE CACHEE DU CUBE - DIE VERSTECKTE WÜRFELSEITE (Cat. 5, 6)

### ANALYSE A PRIORI

#### Domaine de connaissances

- Géométrie spatiale (vision du cube dans l'espace et de sa représentation en perspective)
- Logique (disjonction des cas et déduction)

#### Analyse de la tâche

- Construire un cube (ou son patron) et y dessiner sur ses faces les figures d'une des photos, par exemple a), puis en observant la photo c), et en déplaçant le modèle, voir qu'il n'y a qu'une seule manière de placer les figures des deux autres faces contiguës à celle du carré. La face opposée au cercle est celle de l'étoile à huit branches. Vérifier éventuellement que la photo b) est compatible avec cette disposition.

Ou : constater que chaque photo détermine les positions relatives de trois figures et que ce sont celles qu'on retrouve sur deux photos qui permettront de déterminer les positions relatives des six figures :

A chaque fois qu'une figure est sur deux photos, on connaît aussi les figures des quatre faces adjacentes à celle de la figure commune et encore, par élimination, que la sixième figure est sur la face opposée. Il y a ainsi trois cas où une figure est commune à deux photos, qui permettent de savoir que :

- le carré est sur les photos a) et c), avec le cercle, le double cercle, la croix et l'étoile à huit branches sur les faces adjacentes, et l'étoile à 4 branches, est sur la face opposée à celle du carré ;
- le double cercle est sur les photos a) et b), avec le cercle, le carré, l'étoile à quatre branches et l'étoile à huit branches sur les faces adjacentes, et la croix est sur la face opposée à celle du double cercle ;
- l'étoile à huit branches est sur les photos b) et c), avec le double cercle, la croix et le carré et l'étoile à quatre branches sur les faces adjacentes, et le cercle est sur la face opposée à celle de l'étoile à huit branches.

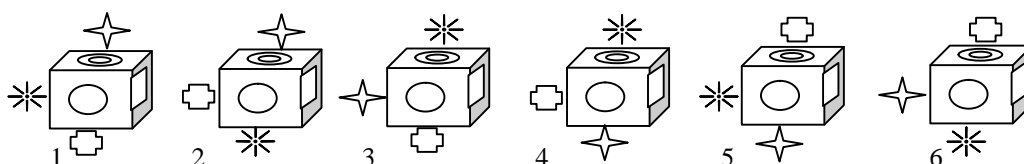
- Ce dernier cas donne la réponse du problème : la figure dessinée sur la face opposée à celle du cercle est (l'étoile à huit branches).

(On remarque en passant que les photos b et c suffisent pour déterminer la réponse comme dans la première procédure, et que l'analyse des deux premiers cas est superflue.)

Ou : à partir d'un des deux premiers cas ci-dessus où les quatre figures des faces adjacentes à celle de la figure commune, sont déterminées, tenir compte de « l'orientation » du cube.

Par exemple, pour les photos a) et c), si l'on place une montre sur la face du carré, la première photo montre que le cercle précède le double cercle dans le sens de rotation des aiguilles puis, d'après la deuxième photo que l'étoile à huit branches précède la croix. On en déduit que le double cercle vient après le cercle et avant l'étoile à huit branches, ces deux figures étant dessinées sur des faces opposées.

Ou : conduire une analyse de type combinatoire. Par exemple, une exploration systématique à partir de a) permet d'éliminer les deux figures des faces adjacentes à celle du cercle (le carré et le double cercle) et d'envisager les 6 dispositions des trois autres figures sur les trois faces non visibles. puis de représenter ces 6 cubes en perspective (ou construire des patrons) en plaçant les figures sur les faces, selon les photos b) et c) :



1 ne convient pas d'après c), car est à côté de .

2 ne convient pas d'après c), car est à côté de .

3 convient, car a), b), et c) sont respectés.

4 ne convient pas d'après b), car est à côté de .

5 ne convient pas d'après c), car est à côté de .

6 ne convient pas d'après b), car est à côté de .

La réponse est donc

#### Attribution des points

- 4 Réponse exacte : (étoile à 8 branches) avec explications ou dessin ou modèle
- 3 Réponse exacte, avec explications incomplètes ou dessin peu clair
- 2 Réponse erronée mais avec description d'une recherche complète mais partiellement juste
- 1 Réponse exacte sans aucune explication  
ou début de recherche cohérente (patron incomplet, modèle sans symboles ...)
- 0 Incompréhension du problème



**9. JETONS EN TRIANGLES - DREIECKSFIGUREN AUS SPIELMARKEN** (Cat. 5, 6, 7)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : addition et soustraction
- Fonctions : suites de nombres (triangulaires)

**Analyse de la tâche**

- Se rendre compte qu'il faut savoir quel est le dernier triangle d'Anne afin de déterminer celui de Pierre.
- Imaginer, dessiner ou construire effectivement avec du matériel les triangles d'Anne pour vérifier combien elle en a fait pour utiliser les 120 jetons et combien il y en a dans sa dernière. Il faut donc comprendre la règle de passage de l'une à la suivante. Par exemple, voir que du 1<sup>e</sup> au 2<sup>e</sup> on a ajouté une ligne de 2 jetons, du 2<sup>e</sup> au 3<sup>e</sup> on a ajouté 3 jetons, ... voir qu'il en faudra 6 de plus pour le 6<sup>e</sup>, et noter la suite 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ... qui donne les nombres de jetons des triangles successifs.
- Calculer le nombre total de jetons utilisés après 5, 6, 7 ... triangles pour savoir à quel moment on arrive à 120. les totaux partiels sont 1,  $1 + 3 = 4$  ;  $4 + 6 = 10$  ;  $10 + 10 = 20$  ;  $20 + 15 = 35$  (voir dessin),  $35 + 21 = 56$  (après la 6<sup>e</sup>) ;  $56 + 28 = 84$  (après le 7<sup>e</sup>) ; et finalement  $84 + 36 = 120$  pour les huit premiers triangles. (les nombres de jetons et les totaux partiels peuvent évidemment être disposés en tableau,...)
- Déterminer alors que le triangle de Pierre, le 9<sup>e</sup>, sera composé de 45 jetons.
- Il reste à trouver, parmi les nombres de la suite des huit premiers nombres de jetons par triangle : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, lesquels permettent de former une somme de 45 :
  - avec deux termes, ce n'est pas possible ;
  - avec trois termes, vu que  $45 = 36 + 9$ , on peut constater que  $9 = 6 + 3$  et que  **$45 = 36 + 6 + 3$**  ;
  - avec quatre termes, on peut partir de la somme précédente, constater que  $36 = 21 + 15$  et que  **$45 = 21 + 15 + 6 + 3$**  ; mais qu'il y a encore une solution  **$45 = 1 + 6 + 10 + 28$**
  - avec plus de quatre termes, il n'y a pas de solutions.
- Revenir aux constructions et répondre que Pierre a pu prendre les jetons des 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> et 8<sup>e</sup> triangles ou qu'il a aussi pu prendre ceux des 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> triangles ou encore ceux des 1<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> triangles

Ou : se baser sur des dessins, des manipulations, des essais numériques, des organisations de nombres en tableaux, etc.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte et complète (les trois possibilités 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 8<sup>e</sup> ou 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup> ou 1<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> triangles) avec détail des calculs
- 3 Réponse correcte et complète (les trois possibilités 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 8<sup>e</sup> ou 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup> ou 1<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> triangles), sans détails des calculs  
ou réponse avec deux des trois possibilités ci-dessus et détails des calculs  
ou réponses :  $45 = 36 + 6 + 3$  ;  $45 = 21 + 15 + 6 + 3$  ;  $45 = 28 + 10 + 6 + 1$
- 2 Une seule des possibilités correctes, avec détail des calculs  
ou deux possibilités sans détails des calculs
- 1 une possibilité sans détails  
ou début de raisonnement : découverte de la dernière construction d'Anne (le 8<sup>e</sup> de 36 jetons), erreurs de calcul, ...
- 0 Incompréhension du problème

**10. FINALE DU MAACH MAT(H) - MAACH MAT(H) FINALE 2010 (Cat. 5, 6, 7, 8)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Géométrie : cube ; visualisation spatiale ; surface d'un solide
- Arithmétique : dénombrement, opérations, proportionnalité

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que pour chaque chiffre ou lettre, il faut s'intéresser à la surface des cubes qui composent le modèle en excluant les faces collées (et non au volume du modèle ou à son nombre de cubes).
- Compter les 32 faces à peindre du « 1 ». (Une à une ou, par exemple :  $2 \times 10 + 2 \times 5 + 2$ , ou encore  $60 - 28$  qui est le nombre total de faces des 10 cubes moins le nombre de faces collées).
- Calculer la quantité de peinture employée pour peindre une face est égale à 1,5 cl ( $48 / 32$ ).
- Observer ensuite que le chiffre « 8 » a 47 faces visibles et que la lettre « F » en a 33. Il y a ainsi 112 ( $47 + 33 + 32$ ) faces à peindre et calculer qu'il faudra  $112 \times 1,5 = 168$  cl de peinture rouge, (ou  $47 \times 1,5 + 33 \times 1,5 + 48 = 168$ ).

Ou, sans passer par le volume de peinture par face, utiliser la proportionnalité pour calculer la quantité totale nécessaire pour peindre les 112 faces, compte tenu que pour en peindre 32, il faut 48 cl de peinture répartie uniformément :  $48 \times 112/32 = 168$  (en cl).

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (168 cl de peinture rouge) avec des explications claires et complètes
- 3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes
- 2 Réponse correcte sans explications  
ou réponse erronée due à une erreur de comptage des faces (dans l'une des pièces ou dans le total), mais avec un raisonnement correct ou à une erreur dans l'application de la proportionnalité
- 1 Début de raisonnement cohérent,  
ou bien réponse erronée due à deux erreurs de comptage, ou de calcul  
ou réponse erronée due à la prise en compte de toutes les faces des 31 cubes (186) sans tenir compte des collages ( $48 \times 186/60 = 148,8$ ) ou sans tenir compte des collages sur le socle ( $48 \times 118/34 = 2832/17 \approx 166,6$ )
- 0 Incompréhension du problème

**11. LE PAQUET DE PAPILOTES - EINGEWICKELTE BONBONS** (Cat. 6, 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : addition et soustraction
- Algèbre : système d'équations linéaires
- Logique ; négation

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que comme les papillotes ne sont que de trois couleurs, et qu'il y en a plus de 39  
(1) les papillotes qui ne sont pas rouges sont bleues ou vertes et sont au nombre de 28 ( $B + V = 28$ )  
(2) de même il y a 39 papillotes rouges ou vertes ( $R + V = 39$ )  
(3) de même il y a 31 papillotes rouges ou bleues ( $B + R = 31$ ).  
- Procéder ensuite par essais et ajustements en fixant un nombre de papillotes d'une certaine couleur pour en déduire celui des autres couleurs selon les propositions (1), (2) et (3) en vérifiant qu'elles sont vraies toutes les trois. (Cette procédure peut venir de l'information sur l'ordre des nombres de papillotes de chaque couleur :  $R > V > B$ )  
Se rendre ainsi compte que la seule possibilité est  $R = 21$ ,  $V = 18$  et  $B = 10$ .

Ou remarquer qu'en ajoutant  $28 + 39 + 31 = 98$  on obtient deux fois le nombre total des papillotes, en déduire qu'il y a  $98/2 = 49$  papillotes dans le paquet et que  $49 - 28 = 21$  sont rouges,  $49 - 31 = 18$  sont vertes.  $49 - 39 = 10$  sont bleues.

Ou, par une méthode « pré-algébrique », en désignant par B, V, R les nombres de papillotes bleues, rouges et vertes, résoudre le « système d'équations »  $B + V = 28$ ,  $R + V = 39$ ,  $B + R = 31$  ; par exemple « par addition » comme ci-dessus ou, « par soustraction » en déduisant des deux premières que R vaut 11 ( $39 - 28$ ) de plus que B puis en soustrayant 11 de 31 dans la troisième pour savoir que  $2B = 20$ , ...

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (21 R, 18V, 10 B,) avec explications claires et complètes de la démarche conduisant au résultat
- 3 Réponse correcte avec explications confuses de la démarche conduisant au résultat.
- 2 Réponse correcte sans explication  
ou réponse avec une erreur de calcul mais qui conserve le nombre total de papillotes avec explications
- 1 Réponse avec une erreur de calcul mais qui conserve le nombre total de papillotes, sans explications  
ou début de démarche correcte : par exemple quelques essais invalidés
- 0 Incompréhension du problème

**12. SPORTS DIVERS -VERSCHIEDENE SPORTARTEN** (Cat. 6, 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

Logique : négation, complémentaire; raisonnement hypothético-déductif

**Analyse de la tâche**

- Des deux premières informations, comprendre que Jacques ne joue pas au football et que Louis ne joue pas au basket, mais qu'ils ont des amis qui jouent l'un au basket et l'autre au football. En plus, Louis ne peut pas jouer au football parce qu'il n'aime que la musique classique. Ce sont donc François et Bernard qui pratiquent le football et le basket.
- De la troisième condition, François ne joue pas au football, il joue donc au basket et c'est Bernard qui joue au football.
- De la quatrième condition, on sait que Louis ne pratique pas l'escrime, alors il joue au volley et Jacques pratique l'escrime.

Ou : après avoir trouvé que Jacques ne joue pas au football, procéder par essais en faisant des hypothèses répétées sur ceux qui pratiquent les autres sports. Vérifier ensuite les autres conditions pour arriver soit à une contradiction soit à la solution.

**Attribution des points**

- 4 Solution correcte (François – basket ; Bernard – football ; Louis - volley ; Jacques - escrime) et bien justifiée
- 3 Solution correcte, avec une vérification seulement ou explications peu claires
- 2 Solution correcte sans explications
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple, découverte que Jacques ne joue ni au football ni au basket)
- 0 Incompréhension du problème

**13. AU SUPERMARCHÉ - TREFFPUNKT SUPERMARKT** (Cat. 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Mesures : temps
- Arithmétique : addition et soustraction
- Logique

**Analyse de la tâche**

- Se rendre compte que, si sa montre avance, on arrive avant l'heure déterminée et, au contraire, si sa montre retarde, on arrive plus tard.
- Déterminer que :  
quand il sera 10.05 à la montre de Claire, qui retarde de 5 minutes, il sera en réalité 10.10 ( $10.05 + 0.05$ ). En lisant sa montre qui indique 10.05, Claire, qui croit qu'elle avance de 6 minutes, pense qu'il est 09.59. Il y a donc à ce moment 11 minutes d'écart (retard) entre l'heure pensée par C et l'heure réelle. Claire arrivera donc à  $10.05 + 0.11 = 10.16$ .  
quand il sera 10.05 à la montre d'Anne, qui avance de 8 minutes, il sera en réalité 09.57 ( $10.05 - 0.08$ ). En lisant sa montre qui indique 10.05, Anne, qui croit qu'elle retarde de 4 minutes, pense qu'il est 10.09. Il y a donc à ce moment 12 minutes d'écart (avance) entre l'heure pensée par Anne et l'heure réelle. Anne arrivera donc à  $10.05 - 0.12 = 09.53$ .
- En conclure que A arrivera la première, à 9.53, avec une avance de 23 minutes sur Claire ( $10.16 - 9.53 = 0.23$ )

Ou, trouver l'heure d'arrivée de Claire à partir de celle du rendez-vous (10.05), ajouter 6 minutes pour l'avance présumé et les 5 minutes dues au retard effectif pour arriver ainsi à 10.16.

De même, trouver l'heure d'arrivée d'Anne à partir de celle du rendez-vous (10.05), retrancher 8 minutes pour le retard présumé et les 4 minutes dues à l'avance effective pour arriver ainsi à 9.53.

- Calculer la différence entre les deux ( $10.16 - 9.53 = 23$  minutes).

**Attribution des points**

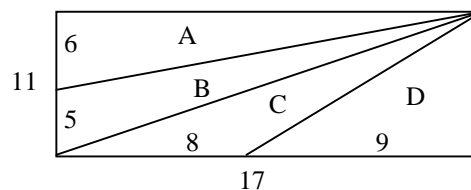
- 4 La solution exacte et complète (Anne, 09h53 avec 23 minutes d'avance) avec explications claires
- 3 La solution exacte et complète (Anne, 09h53 avec 23 minutes d'avance) avec explications incomplètes ou sans explications  
ou solution incomplète (oubli des 23 minutes) mais avec explications complètes (heures d'arrivée des deux filles)  
ou les trois réponses avec explications claires mais avec une seule erreur de calcul
- 2 Deux réponses correctes sur trois avec ou sans explications
- 1 La solution erronée (Claire, 09h54 avec 23 minutes d'avance) due à une confusion entre « retard » et « avance ».  
ou une seule des trois réponses correctes  
ou début de solution correct, par exemple avec le calcul d'un des éléments conduit correctement mais avec une réponse fausse
- 0 Incompréhension du problème

## 14. UNE BELLE BANDEROLE - DAS RMT-BANNER (Cat. 7, 8)

## ANALYSE A PRIORI

## Domaine de connaissances

- Géométrie : aire du triangle
- Mesures
- Arithmétique : comparaison de fractions



## Analyse de la tâche

- Comprendre que pour dépenser le moins possible, il faudra peindre le triangle le plus grand avec la peinture la moins chère ainsi de suite...
- Comprendre ainsi qu'il faudra comparer les triangles selon leur aire.
- Pour les deux triangles C et D, observer que les mesures des deux bases (sur la longueur du rectangle) sont 9 et 8 en unités reportées sur la longueur. Comme ils ont la même hauteur, en déduire que l'aire de D sera supérieure à celle de C (bien que ce dernier ait des côtés plus longs).

Le même raisonnement s'applique aux deux triangles A et B dont les mesures des bases sont 6 et 5 en unités reportées sur la largeur. Le triangle A aura une aire supérieure à celle de B.

- Pour comparer les aires des quatre triangles, se rendre compte qu'on a besoin d'une unité commune. Il y a alors plusieurs manières de s'en tirer :
  - imaginer le grand rectangle partagé en petits rectangles unités : 17 dans la longueur et 11 dans la largeur. L'aire du triangle rectangle D vaudra donc la moitié d'un rectangle de  $9 \times 11$  rectangles unités, c'est-à-dire  $99/2$  ou  $49,5$ . L'aire du suivant, C, vaudra, (par un raisonnement analogue mais faisant appel à la « formule » de l'aire d'un triangle)  $8 \times 11/2 = 88/2 = 44$ . Selon le même pavage en rectangles unités, le triangle A a une aire de  $(6 \times 17)/2 = 51$  et B a une aire de  $(5 \times 17)/2 = 42,5$  ;
  - avec des rapports en prenant le grand rectangle comme unité, les aires des quatre triangles (depuis la droite) sont les moitiés de  $9/17$ , de  $8/17$ , de  $5/11$  et de  $6/11$ . Il ne reste qu'à comparer ces quatre fractions en les mettant par exemple au même dénominateur :  $99/187$  ;  $88/187$  ;  $85/187$  et  $102/187$  ;
  - par un calcul algébrique, en désignant par a et b les mesures en cm des unités choisies sur la longueur et sur la largeur du rectangle, exprimer les aires des quatre triangles :
    - A.  $(6b \times 17a)/2 = 51ab$  ; B.  $(5b \times 17a)/2 = 42,5ab$  ; C.  $(8a \times 11b)/2 = 44ab$  ; D.  $(9a \times 11b)/2 = 49,5ab$ .

Ou : calculer les aires des quatre triangles après avoir pris les mesures nécessaires à la règle (mais trouvant alors des mesures approximatives).

Choisir en conséquence la couleur la moins chère pour le plus grand triangle, orange et ainsi de suite. On arrive ainsi aux couleurs A en orange, B en jaune, C en bleu et D en vert.

## Attribution des points

- 4 Réponse correcte (A en orange, B en jaune, C en bleu et D en vert) avec explications complètes
- 3 Réponse correcte avec explications incomplètes
- 2 Comparaison correcte des aires seulement, pour les deux couples de triangles de même hauteur, avec explications
  - ou réponse avec une interversion entre deux couleurs due à une erreur de calcul
1. Réponse correcte sans explication
  - ou réponse « A vert, B, bleu, C jaune et D orange correspondant à la dépense maximale
- 0 Incompréhension du problème

## 15. TRIANGLE CÉLÈBRE - EIN BERÜHMTES DREIECK (Cat 7, 8)

### ANALYSE A PRIORI

#### Domaine de connaissances

- Arithmétique : régularités numériques (nombres triangulaires)
- Fonctions : suites

#### Tâche de l'élève

- Compléter le triangle par les nombres des lignes suivantes, colorier les cases des nombres pairs, compter les cases rouges et blanches et se rendre compte qu'il faut prolonger le triangle jusqu'à la 19<sup>e</sup> ligne pour obtenir plus de cases rouges que de blanches (99 et 91) (Cette procédure est longue et peut conduire à des erreurs.)

Ou : commencer par colorier les cases rouges des premières lignes, puis calculer les nombres manquants dans les lignes suivantes.

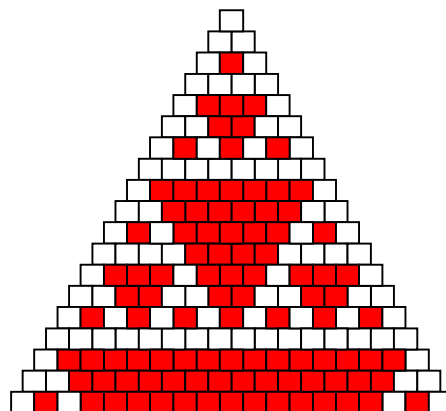
- Découvrir les premières régularités de la répartition des nombres pairs, disposés en triangles.
- Constater éventuellement qu'il n'est plus nécessaire de calculer les nombres mais qu'on peut déterminer la parité d'après les nombres de la ligne précédente : « pair (rouge) + pair (rouge) → pair (rouge) ; « pair (rouge) + impair (blanc) → impair (blanc) etc.).
- Approfondir son observation de la disposition des cases rouges par triangles par des répétitions (fractales)
- Émettre des hypothèses sur la croissance du rapport : nb cases rouges/nb total de cases et les vérifier. On remarque que la croissance n'est pas monotone, mais cependant on pense qu'elle est limitée après les calculs sur les premières lignes. On arrive cependant déjà à 40% à la 10<sup>e</sup> ligne.
- Prolonger le triangle vers le bas, colorier et compter de manière organisée les cases pour découvrir qu'à la 19<sup>e</sup> ligne le rapport cases rouges / nombre total de cases dépasse les 50%.

Exemple de tableau organisé :

no de la ligne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
nb cases rouges	0	0	1	0	3	2	3	0	7	6	7	4	9	6	7	0	15	14	15	12
nb cumulé rouges	0	0	1	1	4	6	9	9	16	22	29	33	42	48	55	55	70	84	99	111
nb cumulé cases	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210
rapport (appr.)	0	0	1/6	0,1	4/15	...	...	...	...	0,4	...	...	...	...	...	...	0,46	0,49	0,52	0,53

#### Attribution des points

- 4 Réponse exacte (« oui », à partir de la ligne 19), calculs (comptage sur dessin ou tableau)
- 3 Réponse exacte, mais avec explications peu claires
- 2 Réponse « oui », mais avec une erreur sur la ligne, due à des erreurs de comptage, avec explications cohérentes  
ou la ligne n'est pas indiquée, mais coloriage exact et complet jusqu'à la 19<sup>e</sup> ligne au moins (modèle correct du « tapis »)
- 1 Réponse « non », mais avec un début d'analyse (calculs n'allant pas jusqu'à la ligne 19)  
ou seulement un coloriage correct des 16 premières lignes du triangle
- 0 Incompréhension du problème ou seulement la réponse « oui », sans coloriage



## 16. TAPIS DE CARTES - KARTENSPIEL (Cat. 8)

### ANALYSE A PRIORI

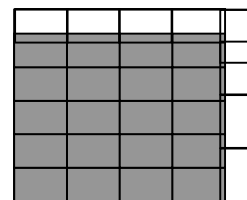
#### Domaine de connaissances

- Arithmétique
- Géométrie, pavages et mesures d'aires

#### Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la solution du problème ne peut pas s'obtenir seulement par des calculs d'aires, mais qu'il s'agit de trouver une disposition des cartes.  
(Le quotient de l'aire du tapis,  $2000 \text{ cm}^2$ , par l'aire d'une carte,  $77 \text{ cm}^2$  est un nombre rationnel non entier -  $2000/77 = 25,97...$  - dont on ne peut tirer qu'une estimation sur le nombre de cartes, qui doit être inférieur ou égal à 25 et supérieur ou égal à 26. Mais il s'agit d'une condition, qui, si on peut la considérer comme nécessaire, n'est pas suffisante. Il suffit d'imaginer un rectangle équivalent, de 4 cm sur 500 cm pour se rendre compte qu'on ne pourrait y placer aucune carte sans dépasser les bords. )

- Remarquer que la disposition immédiate (voir figure) suivante comporte 28 cartes, avec 8 cartes chevauchant partiellement d'autres. Pour faire mieux, il faut donc essayer de recouvrir le tapis avec seulement 26 ou 27 cartes.
- Comprendre que le recouvrement en un minimum de cartes revient à placer le plus possible de cartes (qui ne se superposent pas) dans le tapis puis à « boucher les trous ».



Une stratégie possible est d'essayer d'occuper les bords du rectangle sans chevauchements.

- Se rendre compte que ni 11, ni 7 ne sont des diviseurs de 50 et de 40 et qu'il faut abandonner l'idée de placer toutes les cartes dans la même « direction » ou par rangs complets, ce qui laisserait des bords libres et ne permettrait évidemment pas d'arriver à une solution optimale (*figures 1 et 2*). Il faut percevoir que 40 et 50 peuvent se décomposer en sommes de multiples de 11 et de multiples de 7 ( $50 = 28 + 22$  et  $40 = 33 + 7$ ) (*figure 3*) puis imaginer que, par symétrie centrale, on peut recouvrir les quatre bords (*figure 4*)

On peut arriver aux mêmes constatations par un dessin (par exemple sur quadrillage) ou par manipulation après découpage de cartes.

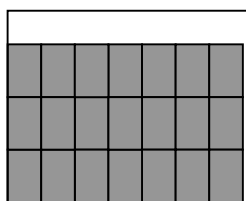


fig. 1

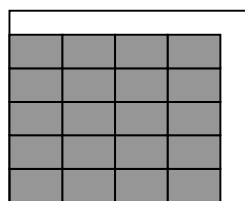


fig. 2



fig. 3

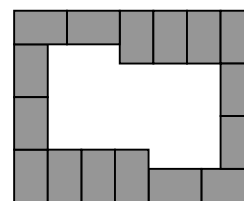


fig. 4

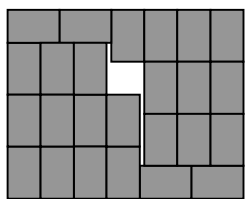


fig. 5

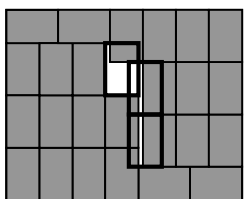


fig. 6

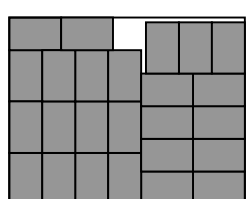


fig. 7

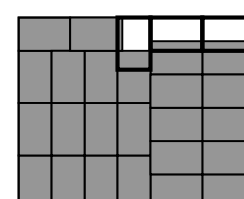


fig. 8

- Poursuivre le remplissage à partir des bords, pour arriver au point où l'on ne peut plus ajouter de cartes (comme dans l'exemple de la *figure 5*) et dénombrer les cartes placées. (25). À ce moment, on peut éventuellement se rapporter au calcul des aires pour constater qu'on a atteint le maximum de 25 cartes.
- Observer les « trous à boucher » et constater que, même si leur aire ne dépasse pas celle d'une carte, il y a des « fentes » qui ne peuvent pas être recouvertes par une seule carte et nécessitent trois cartes (*figure 6*). On arrive alors à un total de 28 cartes pour recouvrir le tapis, comme pour la « disposition immédiate ».
- Essayer alors de disposer les 25 cartes dans des dispositions plus favorables (*figure 7*) et constater qu'il faut toujours trois cartes pour « boucher les trous ».
- Vu que la surface des trous est inférieure à celle d'une carte et qu'il faut de toute manière trois cartes pour « boucher les trous » supposer qu'il y a un « gaspillage » en voulant absolument placer 25 cartes sans superposition. Tenter encore, alors, de « boucher les trous » à partir de 24 cartes et découvrir que trois cartes permettent aussi de compléter les trous même s'ils sont plus grands (par exemple, *figure 8*). On arrive ainsi à un recouvrement optimal du tapis en 27 cartes.



(Ces recherches de solutions optimales peuvent se faire sur papier quadrillé ou par manipulation avec des rectangles découpés. Les opérations arithmétiques passent ici au second rang.)

**Attribution des points**

- 4 Une solution optimale (27 cartes) avec croquis sur lequel on distingue clairement les 27 cartes
- 3 Une solution non optimale (28 cartes) avec croquis, correct sur lequel on distingue les 28 cartes ou une solution en 27 cartes où les cartes ne se distinguent pas clairement sur le croquis
- 2 Une solution non optimale (29 cartes) avec croquis correct sur lequel on distingue 29 cartes ou une solution mentionnant 28 cartes avec croquis sur lesquels on ne les distingue pas clairement
- 1 Une solution avec croquis correct sur lequel on distingue 30 ou 31 cartes ou solutions avec croquis peu clairs mentionnant 29 cartes ou l'indication sur le dessin de la décomposition de 50 en  $28 + 22$  et 40 en  $33 + 7$  conduisant recouvrement complet le bord sans superposition
- 0 Une solution mentionnant 26 cartes (sur la base de la division  $5000 : 77$ ) sans croquis ou croquis avec erreurs dans les dimensions des figures, ou incompréhension du problème