

**1. PERLES ROUGES - ROTE PERLEN (Cat. 3)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : opérations élémentaires avec des nombres naturels, proportionnalité

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il y a des relations (de proportionnalité) entre les nombres de perles de chacune des trois couleurs : 1 jaune correspond à 2 bleues ; 1 jaune correspond à 3 rouges ; 2 bleues correspondent à 3 rouges
- À partir d'une ou deux des relations précédentes, déterminer le nombre de perles rouges du collier de Martine.  
Par exemple : imaginer la répartition des 14 perles bleues en 7 groupes de 2 perles et déterminer combien font 7 groupes de 3 perles rouges :  $3 \times 7 = 21$ . Ou passer explicitement par les perles jaunes :  $14 : 2 = 7$  et multiplier par 3 le nombre de perles jaunes pour trouver les rouges.
- Comprendre aussi qu'il y a une relation entre le nombre total des perles et ceux des perles de chaque couleur en remarquant que chaque séquence « jaune-bleue-rouge » est composée de 6 perles. Les relations sont alors 6 perles d'une séquence correspondent à 1perle jaune, 2 bleues et 3 rouges.
- À partir d'une ou plusieurs des relations précédentes, déterminer le nombre de perles rouges du collier de Charlotte.  
Par exemple 30 perles forment 5 séquences de 6 perles ( $30 : 6$ ) et dont 5 jaunes, 10 bleues et 15 rouges, ou les perles rouges sont la moitié du nombre total de perles (relation 6 à 3) et il y a 15 perles rouges ( $30 : 2$ ) dans le collier de Charlotte.

Ou : obtenir les réponses correctes au moyen d'un schéma ou d'un dessin des deux colliers.

**Attribution des points**

- 4 Les deux réponses correctes (21 perles rouges pour Martine, 15 rouges pour Charlotte) avec détail des calculs ou explication avec dessin ou schéma
  - 3 Les deux réponses correctes avec explications incomplètes  
ou une seule réponse correcte et une imprécision pour l'autre, avec explications pour les deux réponses
  - 2 Les deux réponses correctes sans explication  
ou une seule réponse correcte avec explications
  - 1 Une seule réponse correcte sans explication
  - 0 Incompréhension du problème
-

**2. LES PUZZLES - PUZZLES (Cat. 3, 4)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissance**

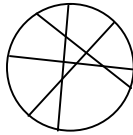
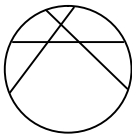
- Géométrie : disque, cordes et régions
- Dénombrement

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il faut décomposer la surface du disque en traçant des cordes.
- Analyser les deux exemples, et envisager un lien entre le nombre de points d'intersection des cordes et le nombre de parties de disque.
- Comprendre que chaque nouvelle corde partage une région de disque qu'elle « traverse » - région définie par les cordes précédentes – en deux parties et que, par conséquent, il faut chercher à la dessiner de manière à « traverser » le plus possible de régions déjà définies ou à « couper » le plus possible de cordes déjà dessinées.
- Appliquer la constatation précédente : « plus il y a d'intersections de cordes, plus il y a de régions » et dessiner les cordes successives en tentant de « couper » toutes celles qui sont déjà dessinées.

Constater encore qu'il faut éviter les intersections communes à plus de deux cordes (ou cercle). Par exemple, 3 cordes peuvent déterminer, deux à deux, trois points d'intersection. Si elles sont concourantes, elles n'en déterminent qu'un seul, ce qui fait disparaître la région triangulaire déterminée par les trois points.

- Dessinez les cordes de manière optimale, pour chaque disque, et dénombrer les régions correspondantes.
- Albert peut obtenir 7 pièces :      Barbara 11 pièces :

**Attribution des points**

- 4 Les deux partages optimaux avec dessins précis permettant un comptage exact : 7 et 11
  - 3 Les deux partages optimaux mais avec une erreur de comptage dans le partage de Barbara (10 ou 12 au lieu de 11)
  - 2 Le partage d'Albert optimal et le partage de Barbara en 10 pièces, les comptages correspondants sont exacts  
ou le partage d'Albert en 6 pièces et celui de Barbara optimal, les comptages correspondants sont exacts
  - 1 Le partage d'Albert optimal et le partage de Barbara en 9 pièces seulement  
ou le partage d'Albert en 6 pièces et celui de Barbara en 10 pièces
  - 0 Incompréhension du problème ou partages et comptages présentant plus de deux « insuffisances »
-

**3. CLASSES INTERNATIONALES - INTERNATIONALE KLASSEN (Cat. 3, 4)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances :**

- Arithmétique : décomposition additive de nombres, addition, division
- Combinatoire

**Analyse de la tâche**

- Calculer la somme de tous les élèves, 63 et en déduire que chaque classe aura un effectif de 21 ( $63 : 3$ )
- Trouver toutes les décompositions de 21 en sommes de deux termes ou plus qui tiennent compte des nombres d'élèves des différentes nationalités :  
en deux termes  $21 = 13 + 8$  ou  $21 = 11 + 10$ ; en trois termes:  $21 = 13 + 7 + 1 = 11 + 9 + 1 = 10 + 7 + 4 = 9 + 8 + 4$  ;  
en quatre termes:  $21 = 9 + 7 + 4 + 1$
- Combiner entre elles les décompositions précédentes de manière à ne pas répéter les mêmes nombres dans une même combinaison, obtenir les trois répartitions possibles des élèves dans les classes

| Solutions | Classe A | Classe B | Classe C   |
|-----------|----------|----------|------------|
| 1         | 11,10    | 13, 7, 1 | 9, 8, 4    |
| 2         | 11,10    | 13, 8    | 9, 7, 4, 1 |
| 3         | 13, 8    | 10, 7, 4 | 11, 9, 1   |

Ou: penser que dans la classe des 13 Italiens les 8 autres élèves ne peuvent être que les 7 Allemands et le Luxembourgeois ou les 8 Suisses. Dans le premier cas, dans la classe des 11 Français, on ne peut ajouter que les 10 Américains pour arriver à 21, ce qui conduit à la solution 1 (la troisième classe ne peut être formée que de  $8 + 9 + 4$ ). Dans le second cas ( $21 = 13 + 8$ ), la classe des 11 Français peut être complétée par les 9 Belges et le Luxembourgeois (solution 3) ou avec les 10 Américains (et l'on arrive à la solution 2). Puisqu'il n'y a pas d'autres cas possibles, on peut conclure qu'il n'y a que ces trois solutions.

**Attribution des points**

- 4 Les trois solutions (voir tableau ci-dessus) avec vérification du fait que ces solutions conviennent (calculs ou explications du genre : 63 élèves, 21 par classe et vérifications pour chaque cas)
  - 3 Les trois solutions avec explications incomplètes  
ou deux solutions avec la vérification des calculs  
ou quatre solutions, une étant donnée deux fois
  - 2 Deux solutions sans explications  
ou une seule solution correcte avec le détail et la vérification des calculs
  - 1 Début de recherche correct (avec au moins la détermination du nombre d'élèves par classe) et un essai de répartition avec contrôle, même si c'est pour l'invalider)
  - 0 Incompréhension du problème
-

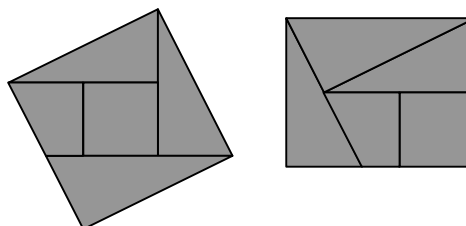
**4. CARRÉ OU RECTANGLE ? - QUADRAT ODER RECHTECK? (Cat. 3, 4, 5)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Géométrie : manipulation et observation de figures : carrés, rectangles et triangles, angles
- Mesures : comparaison de côtés et d'angles

**Analyse de la tâche**

- Observer les cinq pièces et se rendre compte que si l'on veut reconstituer des puzzles, il faut les découper ou les reproduire très précisément pour pouvoir comparer leurs côtés et leurs angles.
- Se convaincre (explicitement ou implicitement, par des superpositions, juxtapositions ou mesures) : qu'une des pièces qui a quatre côtés est un carré, que l'autre a deux angles et deux côtés égaux à ceux du carré ; que les trois autres pièces sont des triangles un angle « comme ceux du carré » qui ont et que deux de ces triangles sont superposables ; ...
- Procéder par essais en découpant les pièces, les translatant, les tournant ou les retournant, (en identifiant en particulier les pièces qui permettent d'obtenir des angles droits ou des parallèles) ... jusqu'à obtenir le rectangle et le carré.

Par exemple, une rotation d'un demi-tour du « grand triangle » autour du sommet droit permet d'obtenir le carré ; une rotation d'un demi-tour du « grand triangle » autour du sommet supérieur et une translation du triangle de droite permettent d'obtenir le rectangle non carré.

**Attribution des points**

- 4 Deux dessins ou assemblages de pièces découpées, corrects et avec une précision permettant de reconnaître clairement les cinq pièces
  - 3 Un seul dessin ou un seul assemblage de pièces correct, l'autre figure étant approximative
  - 2 Un seul dessin ou un seul assemblage de pièces correct, sans solution pour l'autre figure ou deux dessins ou assemblages où une ou deux pièces ne sont pas reconnaissables ou très imprécises
  - 1 Une figure reconstituée seulement mais imprécise ou incomplète
  - 0 Incompréhension du problème
-

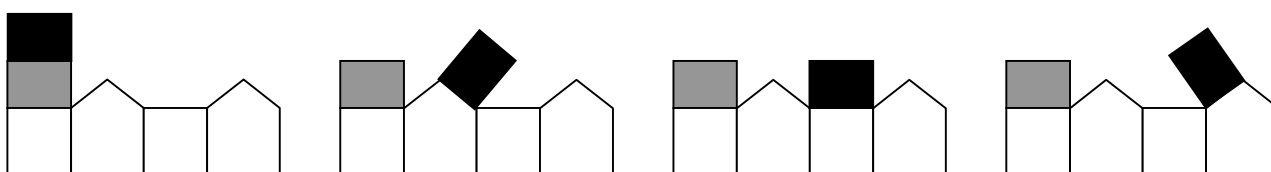
**5. LA MAISON - HAUSBAU** (Cat. 3, 4, 5)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Géométrie : lien entre la vision 2D d'un patron et le solide 3D obtenu par pliage, construction d'un rectangle

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que le « patron » qui est une figure plane devra être découpé et plié pour réaliser la maison et que, avec les 4 façades et le pan du toit dessiné sur la figure, il ne se « referme » pas mais laisse un « trou » qui devra être comblé par l'autre pan du toit.
- Repérer les arêtes du patron sur lesquelles on pourrait adjoindre le rectangle qui manque et éliminer celles qui conduiraient à des superpositions ou qui laisseraient un « trou ».  
ou plier et « fermer » le patron incomplet, constater qu'il y a un « trou » rectangulaire et marquer les quatre arêtes de ce rectangle sur lesquelles pourrait être implanté le pan du toit qui manque.
- Trouver les quatre possibilités et, pour chacune d'elles, construire le rectangle en conservant ses dimensions et ses angles droits, en particulier pour les positions où il est placé sur des arêtes « obliques » de la maquette.
- Vérifier éventuellement les solutions par découpage, pliage et construction effective.

Les quatre patrons possibles :

**Attribution des points**

- 4 Solution complète et claire : les 4 patrons sont dessinés (ou collés) avec le rectangle placé (la précision du tracé n'est pas exigée mais on doit reconnaître le rectangle, ses angles droits, la largeur et la longueur)
  - 3 Solution incomplète : avec une seule des « insuffisances » suivantes : absence ou répétition d'un des patrons, un patron conduit à une superposition de deux faces, un patron laisse un « trou » dû à une erreur ou une grosse imprécision dans le dessin du dernier pan rectangulaire
  - 2 Solution incomplète avec seulement deux des « insuffisances » précédentes
  - 1 Solution incomplète avec trois ou quatre des « insuffisances » précédentes  
ou un seul patron correctement dessiné
  - 0 Incompréhension du problème
-

**6. LE PRIX DES SALADES - DER SALATPREIS (Cat. 4, 5)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : addition, multiplication

**Analyse de la tâche**

- Lire les trois affiches et interpréter les phrases « trois salades pour le prix de deux salades » et « quatre salades pour le prix de trois » selon le langage des promotions commerciales.
- Se rendre compte que chez A, 1 salade est gratuite si on en achète 3 et que, par conséquent 2 salades sont gratuites lorsqu'on en achète 6. Trouver, par additions ou multiplications le prix de 4 salades : 6 euros ( $1,50 + 1,50 + 1,50 + 1,50$  ou  $4 \times 1,50$  ou  $(1,50 + 1,50) \times 2$ )
- Se rendre compte que chez B, il faut profiter de la promotion pour acheter 4 salades au prix de 3 salades et ensuite acheter les deux autres salade hors promotion ce qui revient à payer 5 salades :  $(3 \times 1,20) + 1,20 + 1,20 = 6$  en euros.
- Pour C, calculer le prix des 6 salades : 6 euros, par addition ou multiplication.
- Comparer les résultats obtenus et se rendre compte de l'égalité de ces résultats.
- Formuler la réponse : Il n'y a pas de marchand chez qui Marina dépensera moins que chez les autres car elle paye toujours 6 euros et la justifier par les calculs adéquats.

Ou, (éventuellement pour ceux qui cherchent à dépenser le moins possible) la réponse pourrait être complétée par « Non, mais Marina pourrait acheter 4 salades chez B pour 3,60 euros et 2 salades chez C, ce qui lui reviendrait au total à 5,60 euros »

**Attribution des points**

- 4 Solution : « Non, Marina paie toujours 6 euros avec justifications complètes » (avec ou sans la solution à 5,60 euros)
  - 3 Solution correcte, avec justifications incomplètes (le coût de 6 euros pour chaque marchand est indiqué, mais la justification n'est pas suffisamment explicite)  
ou solution correcte pour les marchands A et C (coût 6 euros) mais erreur sur le calcul du marchand B (2 fois le prix de 4 pour 3 sans se rendre compte que cela donne 8 salades ou le prix de 4 pour 3 plus sa moitié sans se rendre compte que 2 des salades n'entrent pas dans la promotion)
  - 2 Démarche correcte pour les 3 marchands mais comportant une erreur de calcul qui conduit à une réponse erronée mais cohérente avec les calculs faits  
ou solution correcte sans explication
  - 1 Solution ne prenant pas en compte les promotions, sans erreur de calcul
  - 0 Incompréhension du problème
-

**7. LES NOMBRES DE BERNARD - BERNARDS ZAHLEN (Cat. 4, 5, 6)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

Arithmétique : numération, distinction entre nombre et chiffre

Combinatoire : permutations des chiffres 1, 2, 3, 4

Logique, organisation d'une recherche

**Analyse de la tâche**

- S'approprier la situation : comprendre que les nombres de François sont les plus nombreux, que ceux de Claire n'en représentent qu'une partie et que ceux de Bernard ne sont qu'une partie de ceux de Claire.
- Comprendre la combinatoire des nombres de François et les écrire de manière systématique (il y en a  $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ).
- Parmi les nombres précédents, biffer tous ceux qui ne répondent pas aux propriétés des nombres de Claire (en interprétant correctement les négations) pour retenir la liste des neuf nombres : 2143; 2341; 2413 ; 3142 ; 3412; 3421; 4123 ; 4312 ; 4321.
- Parmi les nombres précédents, choisir ceux qui sont pairs : 3142, 3412 et 4312

Ou : tenir compte simultanément des trois propriétés, ou de deux propriétés, et procéder par élimination pour n'obtenir que les nombres de Bernard ou éventuellement ceux de Claire. Il faut toutefois partir d'un inventaire systématique écrit ou non, des nombres de François pour s'assurer de ne pas oublier de nombres de Claire ou de Bernard.

Ou : considérer que les nombres de Claire ne commencent que par 2, 3 ou 4 ; que ceux de Bernard, pairs, se terminent par 2 car il faut exclure ceux se terminant par 4 selon les règles de Claire. En conclure qu'ils ne peuvent être que 3142; 3412; 4312 (le nombre 4132 ne va pas parce que le 3 ne peut pas être à la place des dizaines).

Ou : procéder sans méthode systématique et découvrir peu à peu les différents nombres, sans être certain de les avoir tous et avec le risque d'écrire plusieurs fois un même nombre.

Ou : commencer par écrire tous les nombres qui n'ont pas 1 pour chiffre des milliers et poursuivre en utilisant une des méthodes précédentes.

**Attribution des points**

- 4 Les trois nombres de Bernard (3142, 3412 et 4312) avec des explications montrant que l'inventaire a été organisé et que tous ont été trouvés (par exemple liste organisée des nombres de François, Claire et Bernard)
  - 3 Les trois nombres de Bernard (3242, 3412 et 4312) avec des explications ne permettant pas de voir que la méthode est exhaustive  
ou un seul oubli ou une seule répétition avec cependant des explications montrant une méthode efficace de recherche
  - 2 Les trois nombres de Bernard (3242, 3412 et 4312) sans explication  
ou une seule erreur avec des explications ne permettant pas de voir que la méthode est exhaustive
  - 1 Une seule erreur, sans explication  
ou deux ou trois erreurs avec une explications montrant un début de recherche cohérente
  - 0 Plus de trois erreurs ou incompréhension du problème
-

**8. LE MARCHÉ AUX PUCES – AUF DEM FLOHMARKT** (Cat. 5, 6)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : addition, soustraction et multiplication
- Logique : organisation d'un raisonnement qui tient compte de plus de deux conditions

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que Susy et Lilly dépensent entièrement leur argent : 32,40 (en euros).
- Établir la somme dont elles peuvent disposer pour l'achat de livres et DVD :  $32,40 - 6,10 = 26,30$  (en euros).
- Faire une hypothèse sur le nombre de DVD achetés et examiner si la totalité de la somme restante peut être dépensée en n'achetant que des livres ou le contraire.

Ou déterminer, de manière organisée, les achats possibles selon les offres spéciales (qu'il faut savoir interpréter correctement !).

| Nb.    | 1    | 2    | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10 | 11    | 12 | 13    |
|--------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|-------|----|-------|
| DVD    | 3,60 | 7,20 | 10,80 | 12,60 | 16,20 | 19,80 | 23,40 | 24,20 | 27,80 | -  | -     | -  | -     |
| livres | 2,50 | 4    | 6,50  | 8     | 10,50 | 12    | 14,50 | 16    | 18,50 | 20 | 22,50 | 24 | 26,50 |

et se rendre compte que pour obtenir 26,30 euro (partie décimale : 30) on peut, par exemple, constater que les parties décimales des prix des DVD et des livres ne peuvent être respectivement que 80 et 50 et trouver la seule possibilité : 19,80 et 6,50, ce qui correspond à 6 DVD et 3 livres.

Ou : procéder par essais non organisés et vérifier ensuite la réponse.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (6 DVD et 3 livres) avec explication adéquate
  - 3 Réponse correcte avec explication peu claire ou incomplète
  - 2 Procédure correcte mais une erreur de calcul
  - 1 Réponse erronée mais début de recherche correcte
  - 0 Incompréhension du problème
-



**9. NOMBRES À TROUVER - BESONDERE ZAHLEN** (Cat. 5, 6, 7)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique (somme, produit, parité)
- Combinatoire

**Analyse de la tâche**

- Lire les consignes et comprendre les deux conditions à partir de l'exemple, puis chercher quelques autres nombres.
- Se rendre compte que certains chiffres ne peuvent intervenir dans les nombres :
  - le 0, pour son pouvoir absorbant dans la multiplication
  - les chiffres pairs
  - les chiffres supérieurs à 5 car la somme des 4 chiffres dépasserait 8
- Avec un 5 il y a 4 nombres qui vérifient les deux propriétés, car les 3 autres chiffres ne peuvent être que des 1. On obtient 1115, 1151, 1511, 5111.
- Avec un 3, pour faire une somme de 8, il faut un autre 3 et deux 1. On en obtient 6 qui sont 1133, 1313, 1331, 3113, 3131, 3311.

Ou : chercher les nombres possibles sans se rendre compte explicitement des restrictions précédentes et trouver les 10 nombres mais sans être certains qu'il n'y a pas d'autres solutions.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (les 9 nombres : 1115, 1151, 1511, 5111, 1133, 1331, 3113, 3131, 3311 avec éventuellement 1313 déjà mentionné)
  - 3 Solution incomplète, 7 ou 8 nouveaux nombres corrects, sans réponse incorrecte ou les 9 nombres avec une ou deux répétitions
  - 2 De 4 à 6 nouveaux nombres corrects, sans réponse incorrecte
  - 1 2 ou 3 nouveaux nombres corrects (avec d'autres incorrects)
  - 0 Un seul nouveau nombre trouvé ou incompréhension du problème
-

**10. POINTS DE VUE - BLICKWINKEL** (Cat. 5, 6, 7)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Géométrie dans l'espace : vision spatiale, « polycube », rotation d'un solide, perspective cavalière

**Analyse de la tâche**

- Tourner mentalement la construction d'un quart ou d'un demi-tour par rapport à l'observateur, dans le sens inverse de celui que l'observateur prendrait pour observer la construction sous un autre point de vue.
- Décomposer la construction en éléments plus simples à visualiser mentalement. En particulier le té couché et le té debout.
- Comparer l'image mentale de la construction tournée avec chaque dessin.
- Rejeter les trois dessins correspondant à une position symétrique incorrecte des deux tés : a, e et f.
- Indiquer les vues : b = vue de gauche, c = vue de derrière, d = vue de droite.

**Attribution des points**

- 4 Solution complète : les trois dessins corrects (b, c et d) et les trois points de vue identifiés et bien indiqués
  - 3 Les trois dessins corrects mais une seule vue correctement indiquée (par exemple interversion de gauche et droite)
  - 2 Les trois dessins corrects, sans indication des points de vue ou seulement deux dessins corrects avec les points de vue correspondants
  - 1 Un seul dessin correct avec le point de vue correspondant ou deux dessins corrects avec échange des points de vue
  - 0 Incompréhension du problème
-

**11. LE SERPENT DE BOIS - DIE HOLZSCHLANGE** (Cat. 6, 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaines de connaissances**

- Géométrie : visualisation spatiale : cube et ses propriétés, surface d'un solide, mesure de l'aire des faces d'un solide par rapport à une unité de mesure
- Arithmétique : comptage, addition et soustraction

**Analyse de la tâche**

- Constater que l'on voit 24 cubes sur la figure et se rendre compte que les 3 qui manquent sont cachés, ils soutiennent les trois cubes dont on voit seulement la face supérieure.
- Comprendre que la surface du serpent est constituée de carrés qui sont des faces des cubes avec lesquels il est construit.
- Considérer que les carrés jaunes sont autant de faces des cubes qui forment la « base » du serpent, c'est-à-dire ceux qui sont appuyés directement sur le bureau. Il y en a donc 12 (9 visibles et 3 cachés).
- Pour compter les carrés verts, il suffit de considérer les carrés qui forment la surface de la partie visible non appuyée sur le bureau et ajouter ceux qui forment la surface de la partie non visible sur le dessin et qui ne sont pas en contact avec le bureau.
- On voit directement sur la figure qu'il y a 44 faces visibles.
- On compte ensuite les carrés qui ne sont pas visibles directement sur la figure (pour chaque cube, il faut « s'imaginer » les faces qui manquent) : à partir des trois premiers cubes formant la tête du serpent, on doit ajouter 6 carrés ; en procédant le long des six premiers cubes du corps, on en ajoute 8 autres. En continuant encore le long du serpent, il y en a 6 autres pour chacun des trois « segments » formés de six cubes chacun, ce qui fait qu'il faut ajouter 18 autres carrés pour le reste du serpent.
- Trouver enfin le nombre de carrés verts :  $44 + 6 + 8 + 18 = 76$ .
- Un autre comptage est possible : considérer la surface latérale visible, comprenant 27 carrés. La face latérale non visible est aussi composée de 27 carrés. Il faut ajouter les 22 carrés constituant le dos, le cou et la tête, ce qui donne en tout  $2 \times 27 + 22 = 76$  carrés verts.

Ou bien : remarquer que chaque cube a 6 faces et que chaque fois qu'une face d'un cube s'accroche à celle d'un autre, cette face devient « interne » et ne doit plus être comptée.

- Considérer que le nombre total des faces des 27 cubes est 162 ( $6 \times 27$ ). **OUI OK**
- Trouver le nombre des faces « internes » en comptant le nombre des cubes accolés et en doublant ce nombre. Par exemple, compter d'abord les cubes accolés en « horizontal » (14), ensuite en « vertical » (23) et obtenir ainsi 74  $[(14 + 23) \times 2]$ . **OUI OK**
- Obtenir enfin le nombre des carrés verts du serpent, c'est-à-dire 76, en enlevant de 162 les 74 faces « internes » et les 12 faces jaunes :  $162 - 74 - 12 = 76$ . **OUI OK**

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (12 carrés jaunes, 76 carrés verts) avec explication complète
  - 3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire
  - 2 Réponse correcte sans explication,  
ou réponse correcte à la première question (12) et une erreur de comptage pour la seconde, mais qui montre une procédure systématique et cohérente.
  - 1 Réponse correcte seulement à la première question (12)
  - 0 Incompréhension du problème
-

**12. L'HORLOGE DIGITALE - DIE DIGITAL-UHR** (Cat. 6, 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissance**

Arithmétique, mesures du temps

Combinatoire

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que les nombres figurant sur l'horloge s'écrivent tous avec deux chiffres et admettre les écritures 00, 01, 02 ... comme représentants des nombres 0, 1, 2, ...
- Comprendre que pour les heures, les nombres possibles carrés parfaits sont : 0, 1, 4, 9, 16, et ceux des minutes sont 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, et que, pour pouvoir répondre à la question, il sera nécessaire de dresser l'inventaire de toutes les occurrences des affichages simultanés des deux nombres.
- Cela donne  $5 \times 8 = 40$  affichages possibles, selon le tableau suivant :

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 00:00 | 01:00 | 04:00 | 09:00 | 16:00 |
| 00:01 | 01:01 | 04:01 | 09:01 | 16:01 |
| 00:04 | 01:04 | 04:04 | 09:04 | 16:04 |
| 00:09 | 01:09 | 04:09 | 09:09 | 16:09 |
| 00:16 | 01:16 | 04:16 | 09:16 | 16:16 |
| 00:25 | 01:25 | 04:25 | 09:25 | 16:25 |
| 00:36 | 01:36 | 04:36 | 09:36 | 16:36 |
| 00:49 | 01:49 | 04:49 | 09:49 | 16:49 |

Observer que les lignes 1, 2, 3, 4, 6 et 7 du tableau ne peuvent être retenues, car on n'obtient pas un carré en ajoutant 20 aux minutes affichées. La ligne 5 peut convenir ( $16 + 20 = 36$ ), ainsi que la ligne 8 ( $49 + 20 = 69$ , soit une heure de plus et 09 minutes).

- Rechercher quelles sont les heures qui diffèrent de 4 h 20mn dans ce tableau, par estimation tout d'abord (on voit que c'est vraisemblable entre la première et la troisième colonne ou entre la troisième et la quatrième) puis en effectuant le calcul pour la 5<sup>ème</sup> et la 8<sup>ème</sup> ligne :  
en ajoutant 4 h 20 aux heures de la première colonne, on trouve  $00:16 + 04:20 = \mathbf{04:36}$  et  $00:49 + 04:20 = 05:09$  ;  
et à celles de la troisième colonne  $04:16 + 04:20 = 08:36$  et  $04:49 + 04:20 = \mathbf{09:09}$ .
- Formuler les deux réponses

**Attribution des points**

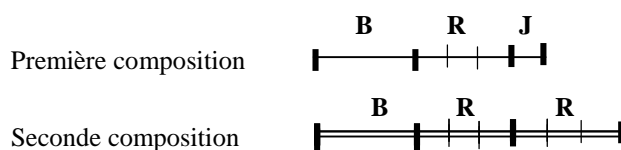
- 4 Les deux heures possibles de retour, 04:36 et 09:09, avec explications détaillées (tableau ou liste et traces des calculs), permettant de voir que toutes les possibilités ont été envisagées
  - 3 Les deux heures possibles de retour : 04:36 et 09:09, sans explication permettant de voir que toutes les possibilités ont été envisagées  
ou une des deux heures possibles (04:36 probablement) avec explications, mais sans avoir envisagé l'addition « avec reste » qui permet de passer des 04 heures aux 09 heures, ou heures de départ au lieu des heures d'arrivée
  - 2 Une des réponses possibles, avec explications peu claires  
ou un raisonnement cohérent mais avec une erreur de calcul  
ou inventaire complet des 40 occurrences
  - 1 Inventaire incomplet des occurrences (au moins 20 occurrences)
  - 0 Incompréhension du problème ou inventaire avec moins de 20 occurrences
-

**13. COMPOSITIONS DE ROSES - ROSENGESTECKE** (Cat. 6, 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : les quatre opérations
- Algèbre : introduction à l'algèbre ; équations et systèmes d'équations

**Analyse de la tâche**

- Considérer les deux compositions de roses (de 3 couleurs la première et de 2 couleurs la deuxième) et les relations existantes entre les nombres des roses de chaque couleur dans les deux compositions.
- Se rendre compte que la différence des nombres de roses des deux compositions ne dépend pas des roses blanches.
- Remarquer que le nombre des roses non-blanches dans les deux compositions peut s'exprimer en fonction seulement du nombre des roses jaunes : dans la première composition, le nombre des roses non-blanches est le quadruple de celui des jaunes (puisque le nombre de rouges est le triple des jaunes), alors que, dans la seconde composition, les rouges sont six fois plus nombreuses que les jaunes (puisque'il y en a le double que dans la première composition).
- En déduire que la différence des nombres de roses des deux compositions, c'est-à-dire 28 (263 – 235), est le double (6 – 4) du nombre des roses jaunes. Il y a donc 14 roses jaunes. Ce raisonnement peut être illustré avec un schéma du type :



dont on déduit que la différence des nombres de roses dans les deux compositions est le double de celui des roses jaunes de la première composition et les deux tiers des roses rouges de la première composition.

- Conclure que dans la première composition il y a 14 roses jaunes, 42 roses rouges et 179 roses blanches, alors que dans la deuxième il y a 84 roses rouges et 179 roses blanches.

Ou : après avoir noté, par exemple, B, R et J respectivement le nombre de roses blanches, rouges et jaunes de la première composition, traduire dans un langage algébrique les relations données dans l'énoncé :  $B + R + J = 235$ , pour la première composition,  $B + 2R = 263$ , pour la seconde composition.

- Faire la différence des nombres de roses des deux compositions pour obtenir la relation  $R - J = 28$ .
- Puisque  $R = 3J$  (seconde condition donnée dans l'énoncé), en déduire que  $2J = 28$  d'où  $J = 14$ . En déduire que  $R = 42$ , ce qui donne  $B = 235 - 14 - 42 = 179$ , d'où la première composition : 179 blanches, 14 jaunes et 42 rouges.
- En déduire qu'il y a  $2 \times 42 = 84$  roses rouges dans la deuxième composition et  $263 - 84 = 179$  roses blanches.
- Les élèves des catégories 9 et 10 pourraient résoudre le problème avec un système d'équations linéaires, par exemple en désignant par b le nombre des roses blanches dans chaque composition et par r le nombre des roses rouges dans la première, on obtient :

$$\begin{cases} b + r + \frac{1}{3}r = 235 \\ b + 2r = 263 \end{cases}$$

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (première composition : 14 roses jaunes, 42 roses rouges et 179 roses blanches ; seconde composition : 84 roses rouges et 179 roses blanches) avec explications claires et complètes
- 3 Réponse correcte avec explications insuffisantes ou peu claires ou seulement avec une vérification
- 2 Réponse correcte sans explication,  
ou réponse erronée due à une erreur de calcul, mais raisonnement correct
- 1 Début de recherche cohérente ou essais de calculs ne tenant pas compte d'une des conditions
- 0 Incompréhension du problème

**14. ANNIVERSAIRES ET BOUGIES - GEBURTSTAGSKERZEN** (Cat. 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaines de connaissances**

- Arithmétique : nombres et numération, écriture polynomiale des nombres en base 10
- Algèbre : équations à deux inconnues dans  $\mathbb{N}$
- Logique : démonstration

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que la différence d'âges entre Luc et son papa est de 36 ans et reste constante. De même, la différence d'âges entre Claire et sa maman est toujours de 30 ans.
- Dédurre de l'écriture décimale de position d'un nombre à deux chiffres, que la différence entre ce nombre et le nombre obtenu en échangeant les chiffres des dizaines et des unités, est un multiple de 9. En effet, on écrit un nombre à deux chiffres  $xy$  sous la forme polynomiale  $10x+y$ , alors que le nombre  $yx$  obtenu en échangeant les chiffres des dizaines et des unités s'écrit  $10y+x$ , et la différence des deux est :  $xy - yx = 10x+y - (10y+x) = 9x - 9y = 9(x - y)$ .
- Conclure qu'il est possible d'utiliser les mêmes bougies pour écrire les anniversaires de Luc et de son papa puisque la différence de leurs âges est 36 qui est un multiple de 9. Conclure aussi que cela n'est pas possible pour Claire et sa maman, car 30 n'est pas un multiple de 9.
- Remarquer que l'échange des bougies  $x$  et  $y$  avec  $y$  et  $x$  n'est possible que si la différence  $x - y$  est 4, car la différence d'âges entre Luc et son papa est de 36 ans.
- Écrire toutes les possibilités pour les âges de Luc et son père, en éliminant l'éventualité 04 et 40 parce que, d'habitude on n'écrit pas sur un gâteau d'anniversaire un âge commençant par 0.

- Luc        15 26 37 48 59  
       Papa    51 62 73 84 95

- Noter que les anniversaires fêtés avec les mêmes bougies se répètent tous les 11 ans, puisque l'on doit conserver une différence de 4 entre les chiffres tout en augmentant les chiffres des unités et des dizaines d'une unité, ce qui fait augmenter les âges de 11 ans.

Ou : procéder par essais successifs à partir de 36 ans pour le papa et 0 pour Luc. On obtient ainsi la première solution possible 51 et 15 et les suivantes en remarquant que l'on doit ajouter 11 pour passer d'une solution à la suivante en augmentant les chiffres des unités et des dizaines d'une unité, tout en conservant la différence d'âges de 36 ans entre Luc et son papa.

- Faire de même pour Claire et sa maman à partir de 0 et 30 en se rendant compte que les chiffres des unités sont les mêmes et que les chiffres des dizaines ont toujours une différence de 3 (différence d'âges de 30 ans), et constater qu'il n'y a pas de solution.
- Ou bien : poser l'équation  $10x + y = 10y + x + 36$  d'où l'on tire  $y = x - 4$ . Observer que l'on ne peut pas attribuer de valeur à  $x$  pour laquelle  $y$  serait négatif et que les valeurs obtenues doivent être des entiers naturels. Pour trouver les solutions, donner toutes les valeurs possibles à  $x$ .

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (Pour Luc-papa : 15-51; 26-62; 37-73; 48-84; 59-95, avec éventuellement la réponse 04-40 ; pas de solution pour Claire-maman) avec explications (démonstration ou étude systématique)
  - 3 Réponse correcte avec explications peu claires pour les deux couples  
ou une seule réponse pour Luc-papa et l'impossibilité pour Claire-maman à partir de deux ou trois essais
  - 2 Réponse correcte sans explication pour Luc-Papa et l'impossibilité pour Claire-maman, sans explication ou avec un seul essai
  - 1 Début de recherche cohérente ou une liste incomplète (au moins deux possibilités) pour le couple Luc-Papa
  - 0 Incompréhension du problème
-

**15. FRACTIONS SUPERPOSÉES – ZUSAMMENGEBAUTE BRÜCHE** (Cat. 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : fractions, simplification, fractions équivalentes, nombres premiers entre eux

**Analyse de la tâche**

- Se rendre compte qu'on ne peut choisir 1 (sinon la fraction serait irréductible), que deux nombres superposés doivent avoir un diviseur commun, que les nombres d'une colonne sont ordonnés du plus petit au plus grand.
- Au cours des essais remarquer qu'il faut choisir des petits nombres dans la première ligne, qu'il est avantageux de noter les fractions simplifiées pour éviter les fractions équivalentes, que si on choisit des nombres pairs uniquement, on est certain que toutes les fractions se simplifieront mais on ne descendra pas au dessous de  $9 \times 2 = 18$ , etc.
- Partir de 2, faire la liste des nombres qui peuvent encore être utilisés : 3, 4 (pas 5) 6, (pas 7), 8, 9 (sous le 6), 10, (pas 11) 12, (pas 13) et 14.

Ou : partir d'une hypothèse sur le plus grand nombre (par exemple 16) et chercher les autres en suivant les règles. Essayer ensuite avec 15 et 14 et se rendre compte enfin qu'avec 12 il n'y a pas de solutions.

Voici quelques solutions, dont les deux premières ne sont pas optimales :

|                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| $\frac{4}{8}$  | $\frac{3}{6}$  | $\frac{2}{14}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{4}{8}$  | $\frac{3}{15}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{6}$  | $\frac{4}{12}$ |                |                |                 |
| $\frac{2}{6}$  | $\frac{3}{9}$  | $\frac{4}{16}$ | $\frac{3}{9}$  | $\frac{4}{12}$ | $\frac{2}{8}$  | $\frac{3}{6}$  | $\frac{4}{10}$ | $\frac{2}{8}$  | $\frac{3}{9}$  | $\frac{4}{12}$ |                 |
| $\frac{1}{14}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{3}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{14}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{2}{9}$  | $\frac{3}{14}$ | $\frac{4}{12}$ |                |                 |
| $\frac{2}{6}$  | $\frac{3}{12}$ | $\frac{4}{8}$  | $\frac{2}{8}$  | $\frac{3}{9}$  | $\frac{4}{6}$  | $\frac{2}{8}$  | $\frac{3}{9}$  | $\frac{4}{6}$  | $\frac{2}{4}$  | $\frac{3}{9}$  | $\frac{8}{10}$  |
| $\frac{1}{9}$  | $\frac{2}{14}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{4}{12}$ | $\frac{6}{12}$ | $\frac{14}{14}$ |

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte : disposition correcte et optimale de 9 nombres entiers positifs (naturels) dont 14 est le plus grand (et le plus petit possible)
  - 3 Réponse : disposition non optimale de 9 nombres entiers positifs (naturels) dont 15 est le plus grand
  - 2 Réponse : disposition non optimale de 9 nombres entiers positifs (naturels) dont 16 est le plus grand ou solution avec 14 ou 15 comme plus grand nombre utilisé, mais avec une « infraction » aux règles
  - 1 Réponse avec 14, 15 ou 16 comme plus grand nombre utilisé, mais avec deux ou trois « infractions »
  - 0 Incompréhension du problème, ...
-

**16. CUBES CACHÉS - VERBORGENE WÜRFEL (Cat 8)****ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : multiplication, décomposition d'un nombre en produits de facteurs
- Géométrie : parallélépipède rectangle, volume et faces latérales

**Analyse de la tâche**

- Lire l'énoncé, comprendre que le parallélépipède doit être composé de 120 ( $86 + 34$ ) cubes et qu'il peut avoir plusieurs dimensions possibles (triplets de nombres naturels dont le produit est 120) :  $1 \times 1 \times 120$  ;  $1 \times 2 \times 60$  ; ...
- Comprendre que le parallélépipède est posé sur sa base dont les cubes « intérieurs » ne sont pas visibles, ce qui n'est pas le cas pour la face supérieure et pour les faces latérales.
- Comprendre que le nombre des cubes invisibles doit être supérieur ou égal à 34 et dépend de la face que l'on pose sur le bureau. Il dépend donc du nombre de cubes en hauteur du parallélépipède.
- Se rendre compte que, si l'on veut « cacher » les cubes noirs, le parallélépipède doit avoir au moins 2 cubes de hauteur et 3 cubes dans les deux autres dimensions.
- Dresser un inventaire complet des parallélépipèdes possibles et calculer pour chacun le nombre des cubes invisibles en fonction de la hauteur choisie.

| Dimensions possibles du parallélépipède | hauteur  | Dimensions du parallélépipède invisible | nombre des cubes invisibles |
|---|----------|---|-----------------------------|
| $2 \times 3 \times 20$                  | 2        | $1 \times 1 \times 18$                  | 18                          |
| $2 \times 4 \times 15$                  | 2        | $1 \times 2 \times 13$                  | 26                          |
| $2 \times 5 \times 12$                  | 2        | $1 \times 3 \times 10$                  | 30                          |
| $2 \times 6 \times 10$                  | 2        | $1 \times 4 \times 8$                   | 32                          |
| $3 \times 4 \times 10$                  | 3        | $2 \times 2 \times 8$                   | 32                          |
| $3 \times 4 \times 10$                  | 4        | $1 \times 3 \times 8$                   | 24                          |
| $3 \times 4 \times 10$                  | 10       | $1 \times 2 \times 9$                   | 18                          |
| <b><math>3 \times 5 \times 8</math></b> | <b>3</b> | <b><math>2 \times 3 \times 6</math></b> | <b>36</b>                   |
| $3 \times 5 \times 8$                   | 5        | $1 \times 4 \times 6$                   | 24                          |
| $3 \times 5 \times 8$                   | 8        | $1 \times 3 \times 7$                   | 21                          |
| <b><math>4 \times 5 \times 6</math></b> | <b>4</b> | <b><math>3 \times 3 \times 4</math></b> | <b>36</b>                   |
| $4 \times 5 \times 6$                   | 5        | $2 \times 4 \times 4$                   | 32                          |
| $4 \times 5 \times 6$                   | 6        | $2 \times 3 \times 5$                   | 30                          |

- Constaté qu'il n'y a que deux dispositions qui permettent de cacher tous les cubes noirs :
  - le parallélépipède de 3 cubes de hauteur, 5 et 8 dans les deux autres dimensions,
  - le parallélépipède de 4 cubes de hauteur, 5 et 6 dans les deux autres dimensions.

**Attribution des points**

- 4 Les deux solutions correctes : 3 (hauteur)  $\times$  5  $\times$  8 et 4 (hauteur)  $\times$  5  $\times$  6, avec des explications claires qui montrent l'étude de tous les cas
  - 3 Les deux solutions correctes avec des explications incomplètes
  - 2 Les deux solutions correctes sans explication  
ou une seule des deux solutions avec explications claires avec au maximum deux triplets erronés
  - 1 Une solution correcte sans explications ou les deux solutions sans indiquer la hauteur ou début de recherche pertinente
  - 0 Incompréhension du problème
-



**17. TREIZE À TABLE - DREIZEHN AM MITTAGSTISCH** (Cat. 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : nombres rationnels, développement décimal

**Tâche de l'élève**

- S'approprier la situation de division et vérifier les affirmations de Julie, Mathieu et Antoine.
- Observer le développement décimal de la division  $192,75 : 13$  sur une ou plusieurs calculatrices différentes et constater qu'il peut y avoir des différences pour les derniers chiffres affichés et qu'on entrevoit un début de régularité.
- Effectuer la division  $192,75 : 13$  par écrit et constater que les « restes » successifs sont : 62,75 en dizaines ; 10,75 en unités ; 35 en dixièmes ; 9 en centièmes, puis 2 ; 3 ; 0 ; 7 ; 6 ; 9 ; 2 ; ... et remarquer que ces restes se répètent régulièrement dès le troisième chiffre après la virgule. Ils conduisent à la période 692307 dans le quotient : 14,82**692307**692307**692307**...
- Constater que la période commence au 3<sup>e</sup> chiffre après la virgule (celui des millièmes) et qu'elle est de 6 chiffres. Diviser par conséquent  $2008 - 2 = 2006$  (car le développement périodique commence au 3<sup>e</sup> chiffre) par 6 (nombre de chiffres de la période) ce qui donne un reste de 2. Ce reste correspond au deuxième chiffre de la période,, qui est 9. Le 2008<sup>e</sup> chiffre du développement décimal est donc 9.

Ou observer que les décimales de rang  $3 + 6n = 2 + 1 + 6n$  sont toutes 6, début de la période. Celles de rang  $4 + 6n = 2 + 2 + 6n$  sont toutes des 9, le second chiffre de la période. Celles de rang  $2 + 3 + 6n$  sont toutes 2, troisième chiffre de la période et ainsi de suite. Donc pour trouver la décimale de rang  $2008 = 2 + r + 6n$ , il suffira de trouver le reste  $r$  de la division de  $2008 - 2 = 2006$  par 6.  $2006 : 6$  donne le reste 2 et le second chiffre de la période, 9, sera la 2008<sup>e</sup> décimale.

Ou, par exemple, en additionnant des multiples de 6 pour s'approcher de 2008, on peut trouver :  $3 + 1800 + 180 + 24 = 2007$ . La 2007<sup>e</sup> décimale sera 6, la 2008<sup>e</sup> sera 9.

**Attribution des points**

- 4 La réponse exacte (le 2008<sup>e</sup> chiffre après la virgule est 9) avec une explication mettant en évidence la période et les moyens de l'utiliser pour déterminer la décimale.
  - 3 La réponse exacte, avec des explications peu claires.
  - 2 La réponse exacte, sans explication  
ou une erreur sur la décimale avec des explications cohérentes (découverte et utilisation de la période, mais imprécision dans la position du 2008<sup>e</sup> chiffre).
  - 1 La période est découverte, mais elle n'est pas utilisée pour déterminer la 2008<sup>e</sup> décimale.
  - 0 Incompréhension du problème.
-