

1. DOMINOS - DOMINOSTEINE (Cat. 3, 4)

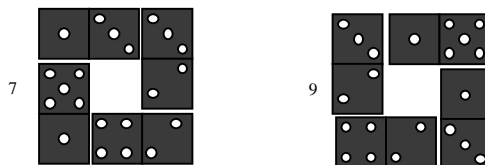
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition

Analyse de la tâche

- Comprendre, au travers de l'exemple de la deuxième figure, ce que signifie la « somme des points sur un côté ».
- Comprendre qu'en retournant un des dominos ou en échangeant les places de deux d'entre eux, on modifie le nombre de points sur les côtés.
- Constater que, vu que certains dominos ont 6 points, le minimum de points sur chaque côté est 7, (obtenu par un domino de 6 points et une partie de domino à 1 point). Se construire un modèle des quatre dominos (découpage,) et procéder par essais. Par exemple pour 7 points, en plaçant le (1 ;5) à côté du « 1 » du domino (1 ;3) et chercher s'il est possible de placer les 2 autres de façon à obtenir 7 sur tous les côtés. (solution, voir ci-dessous)
- Essayer avec une somme de 8 points, (pas de solution) puis avec une somme de 9 points en se rendant compte que, par rapport à la solution de 7 points, les parties de « 5 points » et « 4 points » doivent être placées aux sommets des carrés, où elles sont comptées deux fois, alors que les parties « 1 point » et « 2 points » doivent être sur des milieux de côtés, où elles ne sont comptées qu'une seule fois. (Voir solution ci-dessous)
- Essayer avec des sommes supérieures à 9 et comprendre que les recherches sont inutiles car les points à disposition ne suffisent plus.



Attribution des points

- 4 Solutions correctes : un dessin pour une disposition avec 7 points et un autre pour une disposition avec 9 points
- 3 Une seule des deux solutions avec dessin correct
ou les deux solutions accompagnées d'une solution erronée (donnant un autre total ou avec une faute de calcul)
- 2 Une seule solution correcte et deux erreurs
ou deux solutions avec 3 côtés seulement de même somme
- 1 Une solution avec 3 côtés seulement de même somme
- 0 Incompréhension du problème

2. LES TARTELETTES - SUPERKEKSE (Cat. 3, 4)

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Arithmétique : addition et soustraction

Analyse de la tâche

- Comprendre les différentes relations temporelles contenues dans l'énoncé :
 - les tartelettes sont préparées le matin ;
 - les enfants en mangent 4 chaque après-midi ;
 - les invités arrivent à midi (avant que les enfants ne puissent les manger).
- Procéder à un comptage progressif, jour par jour, en s'aidant par exemple d'un tableau de ce genre :

jour	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
tartelettes produites le matin	5	5	5	5	5	5	5	5
tartelettes disponibles à midi :	5	6	7	8	9	10	11	12
tartelettes mangées au goûter	4	4	4	4	4	4	4	4
tartelettes disponibles le soir	1 (5-4)	2 (1+5-4)	3 (2+5-4)	4	5	6	7	

Ou : comprendre que les 7 premiers jours, la fabrication et les pertes reviennent à une production de 1 tartelette/jour et que les 5 tartelettes produites le 8^e jour permettent d'atteindre 12.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (8) avec explication exhaustive où apparaissent les augmentations et diminutions
- 3 Réponse correcte avec explication partielle
- 2 Réponse correcte sans explication
- 1 Début de raisonnement ou réponse « 12 jours »
- 0 Incompréhension du problème.

3. LE POTAGER DE GRAND-PERE - GROBVATERS GEMÜSEGARTEN (Cat. 3, 4)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Géométrie : disposition régulière d'objets, alignements
- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication

Analyse de la tâche

- Comprendre la disposition des plantes selon le texte ou le dessin : repérer les alignements et leurs régularités.
- Dessiner les plantes qui manquent, selon les régularités découvertes et les dénombrer : 15 salades et 14 choux.

Ou travailler dans le cadre arithmétique :

Calculer les nombres initiaux de plantes de chaque type : $2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 = 26$ salades et $3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 = 30$ choux ; puis dénombrer les plantes restantes de chaque type : 11 salades et 16 choux ; finalement, les soustraire aux nombres initiaux : pour les salades $26 - 11 = 15$, pour les choux : $30 - 16 = 14$.

Attribution des points

- 4 Réponses exactes (15 salades et 14 choux) avec explications (dessin précis ou calculs détaillés)
- 3 Réponses exactes sans explications
ou une erreur de comptage ou de calcul avec explications complètes
- 2 Une des deux réponses exacte avec explications
ou les deux réponses erronées dues soit à une erreur de calcul soit à une imprécision du dessin
- 1 Une seule réponse correcte, sans explication
- 0 Incompréhension du problème

4. LE CADRE DE JULIE - JULIES SPIEGELRAHMEN (Cat. 3, 4)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Géométrie : décomposition-recomposition de formes
- Grandeurs : unité de mesure commune

Analyse de la tâche

- Tenir compte que le carré du milieu n'intervient pas dans la comparaison des aires.
- Comprendre que la surface blanche à couvrir est composée de plusieurs surfaces qui n'ont pas la même « aire »
- Comprendre qu'il est possible de comparer des aires sans les mesurer ou les calculer avec des unités conventionnelles, mais qu'il est nécessaire d'utiliser une unité de mesure commune ou de comparer les aires, partie par partie (grands et petits triangles ou carrés)
- Déterminer l'unité de mesure commune (un carré ou un petit triangle) ; compter le nombre de carrés (16) ou de petits triangles (32) dans chacune des deux parties à colorier ; comparer ces deux nombres et reconnaître l'égalité des aires à couvrir.

Attribution des points

- 4 Solution complète (égalité des aires, autant de peinture grise que de blanche, ...) avec explications correctes et/ou pavage avec une unité commune
 - 3 Solution correcte, avec explications incomplètes
 - 2 Solution correcte sans explication
ou erreur de comptage mais explication correcte
ou prise en compte du miroir avec réponse cohérente « plus de blanc » et explications correctes
 - 1 Début de recherche cohérente
 - 0 Incompréhension du problème, ou erreur « plus de gris (28) que de blanc (20) » qui ne compte que les parties sans tenir compte de leur grandeur.
-

5. RUBAN ADHÉSIF - KLEBEBAND (Cat. 3, 4, 5)

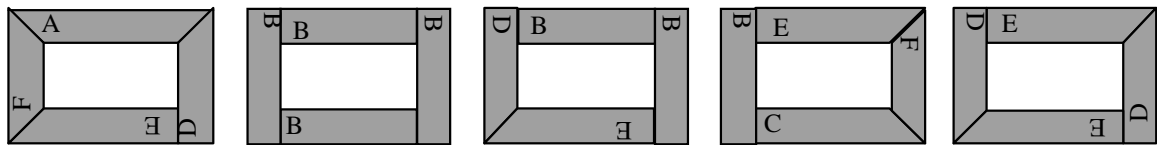
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : décomposition et composition d'une figure, isométries

Analyse de la tâche

- Comprendre que les bandes choisies ne doivent pas se superposer, mais qu'elles peuvent s'orienter et se déplacer par rotations et translations.
- Découper des bandes et essayer de les placer, ou chercher à les dessiner sur les cadres.
Au cours de ces essais, il faut prendre conscience, que les bandes C, D et E n'ont pas d'axe de symétrie et qu'il ne faut pas les confondre avec des formes symétriques par rapport à un axe. Il faut aussi tenir compte des « longueurs » des bandes (A : 6 et 4 carrés, E et C : 5 et 4, B : 4 et 4, D : 4 et 3 et F : 4 et 2.)
- Découvrir les cinq autres solutions : (A, D, E, F), (B, B, B, B), (B, B, D, E), (B, C, E, F) et (E, D, E, D) et éliminer celles qui ont une pièce retournée (C, D, ou E)



Attribution des points

- 4 Réponse complète (les cinq dispositions trouvées, dessinées, avec l'indication des modèles)
- 3 Réponse avec un oubli (une des solutions non trouvée) ou une « erreur » qui peut être un retournement de C, D ou E ; ou une répétition d'une même solution ; ou encore avec un dessin très confus ne permettant pas de reconnaître les modèles
- 2 Réponse avec deux oublis ou « erreurs »
- 1 Réponse avec trois ou quatre oublis ou erreurs
- 0 Incompréhension du problème

6. NOMBRES RÉPÉTÉS - ZAHLEN-WIEDERHOLUNGEN (Cat. 4, 5)

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que le tableau est fait pour contenir les produits de 1 x 1 à 10 x 10 et qu'il s'agit de la « table de multiplication » sous une forme différente de l'inventaire des « produits à mémoriser » (livrets, ...)
- Lire les consignes et les confronter aux exemples donnés en tenant compte des trois exigences : figurer quatre fois, valoir 4 de plus que l'autre nombre, qui doit figurer 3 fois.
- S'apercevoir que la table est symétrique par rapport à sa diagonale principale, c'est-à-dire que deux cases symétriques contiennent le même nombre (en raison de la commutativité de l'opération) et que les cases sur la diagonale sont symétriques d'elles-mêmes, ce qui signifie que les nombres qui s'y trouvent apparaissent un nombre impair de fois et limite ainsi la recherche aux dix nombres 1, 4, 9, ... 100, dont quatre seulement figurent trois fois : 4, 9, 16, 36.
- Examiner ensuite les quatre nombres qui valent 4 de plus : 8, 13, 20 et 40 et constater que, trois seulement sont quatre fois dans la table : 8, 20 et 40.

Ou : partir des nombres qui figurent quatre fois dans la table : 6, 10, 12, 18, 20, 24, 30 et 40 et vérifier si les nombres qui valent 4 de moins y figurent trois fois.

Ou : compléter entièrement la table et vérifier cas par cas si les trois conditions sont remplies.

Attribution des points

- 4 Réponse complète, (les nombres 8, 20 et 40) avec explications ou emplacements des nombres concernés dans la table : 8 et 4, 20 et 16, et faisant comprendre qu'il n'y a que ceux-là.
- 3 Réponse complète, sans explications
- 2 Réponse incomplète, (un seul des deux nombres 8 et 20) avec explication ou les deux nombres et un « intrus » (un autre nombre ne respectant que deux des trois conditions)
- 1 Réponse incomplète (un seul des deux nombres 8 et 20) sans explication ou réponse avec un seul nombre correct et un ou plusieurs intrus ou les deux nombres avec plusieurs intrus
- 0 Incompréhension du problème

7. LE CADRE DE JULIE - JULIES SPIEGELRAHMEN (Cat. 5, 6)

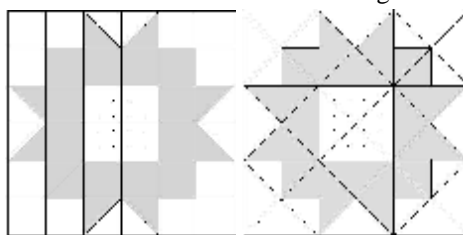
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

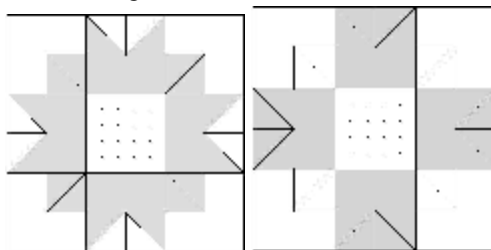
- Géométrie : décomposition-recomposition de formes
- Grandeurs : unité de mesure commune

Analyse de la tâche

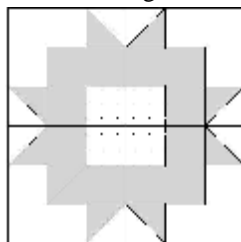
- Comprendre que le carré du milieu n'intervient pas dans la comparaison des aires.
- Comprendre que la surface blanche à couvrir peut être décomposée en plusieurs surfaces.
- Comprendre qu'il est possible de comparer des aires sans les mesurer ou les calculer avec des unités conventionnelles.
- Voir des décompositions possibles de chaque figure en ajoutant des traits dans le carré : déterminer l'unité de mesure commune (un carré ou un triangle) ; compter le nombre de carrés (16) ou de triangles (16) dans chacune des deux parties à colorier ; comparer ces deux nombres et reconnaître l'égalité des aires à couvrir.



- Voir qu'il est possible d'ajouter des lignes dans la partie grisée pour obtenir des carrés ; réaliser l'appariement géométrique entre ces quatre carrés et les quatre triangles clairs ; huit plus grands carrés à colorier apparaissent alors, quatre blancs, quatre gris ; constater l'égalité des aires.



- Tracer les médianes du grand carré ; prolonger les lignes intérieures pour faire apparaître des formes identiques aux quatre formes claires de coin ; réaliser des appariements géométriques entre ces formes et réaliser des appariements entre les triangles blancs et les triangles gris ; constater l'égalité des aires.



Attribution des points

- 4 Solution complète (égalité des aires, autant de peinture grise que de blanche, ...) avec explications correctes, par exemple avec le dessin des décompositions prises en compte
- 3 Solution correcte, avec explications incomplètes ou dessin peu clair
- 2 Solution correcte sans explication
ou erreur de comptage mais explication correcte
ou prise en compte du miroir avec réponse cohérente « plus de blanc » et explications correctes
- 1 Début de recherche cohérente
- 0 Incompréhension du problème, ou réponse « autant de blanc que de gris » fondée sur un comptage qui ne tient pas compte de la grandeur des pièces.

- 4 Les quatre associations correctes 1 / 5 ; 2 / 3 ; 4 / 8, 6 / 7 obtenues par une méthode logique clairement expliquée
- 3 Les quatre associations correctes 1 / 5 ; 2 / 3 ; 4 / 8, 6 / 7 obtenues avec explications du genre « on a essayé », sans autre validation
- 2 Les quatre associations correctes, sans aucune explication
ou : une erreur (deux associations correctes et une interversion dans les deux autres), avec explications claires de la méthode
- 1 Début de raisonnement cohérent, mais ne conduisant qu'à une association correcte
- 0 Incompréhension du problème

10. MACHINE A CALCULER ☺ - TASCHENRECHNER ☺ (Cat. 5, 6, 7)

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les opérations, calcul réfléchi
- Approche intuitive de la notion de fonction

Analyse de la tâche

- Comprendre que la touche « smile » fait correspondre une « image » à tout nombre que l'on « entre » dans la machine.
- Constater que, à l'entrée, de 5 à 7 on augmente de 2 alors que, à la sortie l'augmentation de 25 à 31 est de 6. Faire l'hypothèse que chaque fois qu'on augment de 1 le nombre de l'entrée, la machine augmente de 3 le nombre affiché. L'image de 9 serait alors 37 et l'hypothèse serait vérifiée par l'image de 10 qui est 40.

Ou : procéder par un tableau de nombre à compléter et y chercher des régularités, en particulier celle évoquée précédemment.

entrées :	5	6	7	8	9	10
images	25		31			40

Dans ce cas, il suffit de compléter la suite arithmétique 25 ; 28 ; 31 ; 34 ; 37 ; 40 (en vérifiant le 31 au passage et en déterminant le 37 comme image de 9).

Ou : d'un point de vue « fonctionnel », chercher des relations directes entre l'entrée et la sortie : envisager une multiplication, ou une addition, ou une élévation au carré et se rendre compte qu'il faut orienter ses recherches vers une composition de deux « fonctions simples », par exemple d'une multiplication et d'une addition.

La multiplication par 4, suggérée par la correspondance $10 \rightarrow 40$ montre qu'il faudrait de « petites corrections » pour 5 ($4 \times 5 + 5 = 25$) et 7 ($4 \times 7 + 3 = 31$). Une multiplication par 3 fait correspondre 3, 7 et 10 à 15, 21 et 30 qui valent 10 de moins que les images respectives issues de la machine. La « machine à multiplier par 3 puis ajouter 10 » (fonction affine $x \rightarrow 3x + 10$) est donc une hypothèse à accepter pour les trois couples donnés. Il en existe une infinité d'autres d'un point de vue mathématique, mais celle-ci paraît la plus disponible pour des élèves de l'école primaire.

- L'hypothèse étant acceptée, il suffit de calculer l'image de 9 par la « machine à multiplier par 3 et ajouter 10 », c'est-à-dire $3 \times 9 + 10 = 37$

Ou, pour les élèves qui ont déjà rencontré des représentations graphiques, utiliser le fait que les trois couples (5 ; 25), (7 ; 31) et (10 ; 40) sont représentés par des points alignés.

Attribution des points

- 4 Réponse exacte (37) avec explicitation de la règle trouvée et vérification sur les trois exemples donnés
 - 3 Réponse exacte avec explications incomplètes (par exemple sans les vérifications des trois exemples donnés)
 - 2 Réponse exacte sans aucune explication
ou émission d'une hypothèse, confrontation avec les autres valeurs numériques mais sans calculer l'image de 9
 - 1 Résultats comme 45 ou 36 ; avec une conjecture émise, explicitée mais non pas vérifiée pour les autres nombres donnés, et appliquée directement au nombre « 9 »
 - 0 incompréhension du problème, absence de résultat
-

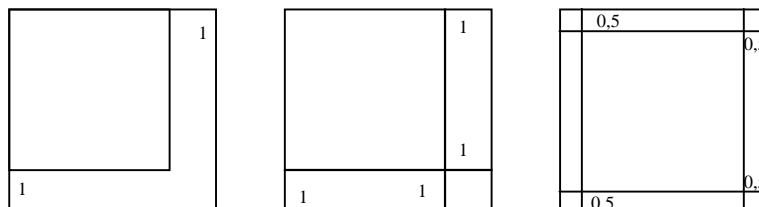
11. LE CHAMP AGRANDI - VERGRÖßERTES FELD (Cat. 5, 6, 7)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Géométrie : périmètre et aire d'un carré, aire du rectangle
- Arithmétique (addition, multiplication)

1

Analyse de la tâche

- Représenter la situation par un croquis de ce genre :



- Constater que la clôture doit être allongée de 4 fois 1 mètre

Ou : se rappeler que le périmètre d'un carré vaut 4 fois la longueur d'un côté. Et si le côté augmente de 1 mètre, le périmètre va augmenter de 4 mètres.

- Décomposer la partie gagnée en deux rectangles et un petit carré d'un mètre de côté.

Les deux rectangles ont pour aire ensemble $41 - 1 = 40 \text{ m}^2$.

Ayant même longueur (le côté de l'ancien champ) et même largeur (1 m), ils ont même aire.

Chacun fait donc 20 m^2 .

Les côtés de l'ancien champ mesuraient donc 20 m.

Ou : dresser un inventaire organisé en faisant varier le côté, pour déterminer la solution correspondante :

mesure ancien côté (en m)	16	...	20	...	21
mesure nouveau côté (en m)	17	...	21	...	22
différence des aires (en m^2)	$289 - 256 = 33$...	$441 - 400 = 41$...	$484 - 441 = 43$

et s'apercevoir que les différences des deux carrés augmentent de 2 en 2, et qu'il n'y a qu'une solution à retenir.

Attribution des points

- 4 Solution correcte : (20 m et 4m), avec explications
- 3 Solution correcte, (20 m et 4m) avec explications incomplètes
- 2 Solution correcte (20 m et 4m) sans aucune explication ni justification
ou solution avec une erreur de calcul, mais avec explications
ou réponse correcte à la première question et réponse 24 m ($1+20+1+1+20+1$) à la deuxième
- 1 Début de recherche cohérente, réponse juste à une des deux questions
- 0 Incompréhension du problème ou réponses entièrement fausses

12. NOMBRES RÉPÉTÉS (II) – ZAHLEN-WIEDERHOLUNGEN (II) (Cat. 6, 7)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : multiplication, multiples et diviseurs, commutativité

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que les deux tableaux inclus l'un dans l'autre contiennent les produits de 1×1 à 10×10 ou de 1×1 à 12×12 .
- Comprendre la véracité du texte qui décrit la table de Julie et la présence de nombres apparaissant une, deux, trois ou quatre fois.
- Constatez que les nombres des cases de la diagonale apparaissent un nombre impair de fois : une fois sur la diagonale et une fois dans chacune des deux parties symétriques, de part et d'autre de la diagonale.
- Chercher en conséquence des nombres apparaissant 5 fois parmi ceux de la diagonale et trouver le « 36 »
- Trouver les nombres qui apparaissent six fois : le 12 et le 24.
- Découvrir que le 48, le 60 et le 72 apparaissent quatre fois dans la table de 10×10 alors qu'ils ne figuraient que deux fois dans celle de 12×12

Ou : compléter entièrement une autre table de multiplication et ne recopier que les nombres demandés, après un contrôle rigoureux.

Voici la solution attendue : 5 nombres en rouge (cinq fois 36), 12 nombres en bleu (six fois 12 et 24) et 12 nombres en vert (quatre fois le 48, le 60 et le 72).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4		6			9			12
2	2	4	6			12	14	16		20		24
3	3	6	9	12				24				36
4	4		12	16	20	24			36			48
5				20								60
6	6	12		24		36		48		60		72
7		14					49					
8		16	24			48			72			
9	9			36				72				
10		20				60						
11												
12	12	24	36	48	60	72						

Attribution des points

- 4 Réponse complète, (voir ci-dessus)
 - 3 Une ou deux erreurs seulement : un nombre n'est pas dans la catégorie (correcte), tous ou quelques nombres en vert inférieurs ou égaux à 20 sont notés, un nombre en vert n'est noté que trois fois au lieu de quatre,
 - 2 De trois à cinq erreurs
 - 1 De six à dix erreurs
 - 0 Incompréhension du problème ou plus de dix erreurs
-

13. LES TIRELIRES DE ROBERT – ROBERTS SPARSCHWEINE (Cat. 6, 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : multiplication de nombres naturels, décomposition en facteurs, commutativité

Analyse de la tâche

- Décomposer 30 en trois facteurs différents et constater, par une recherche organisée, qu'il n'y a que quatre décompositions $1 \times 2 \times 15$ – $1 \times 3 \times 10$ – $1 \times 5 \times 6$ – $2 \times 3 \times 5$. Ajouter un même nombre à chacun des facteurs de chaque décomposition pour trouver si les nouveaux facteurs donnent un produit de 560.
Par exemple $1 \times 2 \times 15$ devient $(1+1) \times (2+1) \times (15+1) = 2 \times 3 \times 16 = 96$ puis $(1+2) \times (2+2) \times (15+2) = 3 \times 4 \times 17 = 204$, puis $4 \times 5 \times 18 = 360$ puis $5 \times 6 \times 19 = 570$, qui dépasse 560.
La décomposition cherchée est $2 \times 3 \times 5$ qui devient $3 \times 4 \times 6 = 72$, puis $4 \times 5 \times 7 = 120$, puis $5 \times 6 \times 8 = 240$, puis $6 \times 7 \times 9 = 378$ et finalement puis $(2+5) \times (3+5) \times (5+5) = 7 \times 8 \times 10 = 560$. Robert a donc ajouté 5 euros aux contenus initiaux qui étaient de 2, 3 et 5 euros.
- Vérifier que les autres décompositions initiales ne permettent pas d'atteindre 560 et en déduire que la solution du problème est unique

Ou : partir des décompositions de 560 en produits de trois facteurs différents. Vu que $560 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$, on peut éliminer les facteurs 1 ou 2 et les facteurs supérieurs à 15 vu l'impossibilité de revenir à des facteurs initiaux positifs et dont le produit sera 30. Il reste à examiner $7 \times 10 \times 8$, $14 \times 10 \times 4$. (C'est le premier de ces deux cas qui permet de revenir à une décomposition de 30 en trois facteurs : $2 \times 3 \times 5$)

Ou trouver au hasard les trois nombres, mais sans pouvoir se prononcer sur l'unicité.

Attribution des points

- 4 Réponse exacte (une seule solution : 2, 3, et 5) avec explications (les décompositions explicites de 30 ou 560) et la vérification que la solution est unique
- 3 Réponse exacte avec explications incomplètes sans certitude de l'unicité ou sans vérifications
- 2 Réponse exacte (2, 3, 5) sans autres explications
ou procédure explicite correcte mais avec erreur de calcul
- 1 Début de recherche permettant de voir que des triplets de nombres ont été envisagés, mais sans aboutir
- 0 Incompréhension du problème.

14. LE DROGUISTE - DER GEWÜRZHÄNDLER (Cat. 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : opérations, proportionnalité, équivalence
- Algèbre : système d'équations

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que, puisque chaque groupe de sachets a un poids de 14 grammes, ils sont égaux deux à deux (en poids) et qu'on peut donc tirer profit des égalités entre deux groupes.
- Observer que les deux premiers groupes de sachets ont le même nombre de grands sachets et qu'on peut donc procéder facilement, par « soustraction » de 4 grands dans chacun des groupes pour se convaincre que 12 petits sachets correspondent à 3 moyens puis, par « division par 3 », que 3 petits correspondent à 1 moyen.
- En comparant le deuxième et le troisième groupe et en « soustrayant » de chacun d'eux 4 moyens et 2 grands, on arrive à « 2 grands équivalent à 1 moyen et 5 petits », puis, par substitution de 1 moyen par 3 petits (équivalence précédente), on arrive à « 2 grands équivalent à 8 petits » puis « 1 grand équivaut à 4 petits ».
- Exprimer chaque groupe au moyen d'un même sachet-unité, par substitutions, pour voir que chacun d'eux est équivalent à 28 petits, (ou 7 grands) et en déduire le poids de chaque type de sachet, en grammes : Pour les petits, $14 : 28 = 0,5$; pour les grands $14 : 7 = 2$ et pour les moyens $3 \times 0,5 = 1,5$.

Ou : Émettre des hypothèses sur les poids des sachets convenant à un groupe et les vérifier sur les autres groupes. Par exemple, choisir pour le deuxième groupe $g = 2,5$ et $m = 1$ (car $4 \times 2,5 + 4 \times 1 = 14$), tirer la valeur de p du premier groupe $12p = 14 - 10 = 4 \Rightarrow p = 1/3$, vérifier que le troisième groupe a un poids différent de 14, puis faire un autre choix. Avec l'hypothèse $p = 2$ et $m = 1,5$ on trouve $p = 0,5$ qui satisfait la relation du troisième groupe, mais sans assurer l'unicité de la solution.

Ou : procéder algébriquement par un système de trois équations et trois inconnues à résoudre par comparaison ou substitution.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (0,5g, 1,5g, 2g) avec explications claires et complètes (démarche par équivalences et substitutions conduisant à une seule solution)
- 3 Réponse correcte obtenue par essais et une seule vérification sans recherche d'autres solutions
ou réponse correcte avec explications partielles
- 2 Réponse correcte sans explications
ou explications claires mais avec une erreur de calcul
- 1 Début de raisonnement (découverte d'une équivalence, ...)
- 0 Incompréhension du problème

15. LE TROC - DER TAUSCHHANDEL (Cat. 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre que les « prix » des objets peuvent s'exprimer en coquillages et en oursins et qu'il s'agit de découvrir la règle d'échanges « coquillages – oursins » à partir des données.

- Ordonner les deux séries de prix 24 36 40 60 100 et 27 45 75 et imaginer lesquels peuvent être en correspondance et où se situent les deux prix manquants « ? » :

24 36 40 60 100 ou 24 36 40 60 100 ou 24 36 40 60 100 etc.

27 ? 45 75 ? ou 27 45 ? 75 ? ou ? ? 27 45 75

- Déterminer quelle est la bonne association en cherchant une règle « plausible » : il faut éliminer les différences et penser aux propriétés de la proportionnalité intuitives ou explicites. Parmi celles-ci il y a la règle du « produit » (le passage au double ou au triple ... dans une des suites doit être reproduit dans l'autre), la règle de « la somme » (si un nombre d'une suite est la somme de deux autres, on doit avoir la même correspondance dans l'autre suite) ou la propriété du « rapport » de proportionnalité (qui doit être le même pour chaque couple de nombres correspondants).

(Avec ces données, la règle du « produit » n'est pas applicable, celle de la « somme » peut servir à la vérification. Le fait que les nombres de la première suite sont des multiples de 4 et ceux de la seconde des multiples de 3 peut aider à faire apparaître le rapport 3/4)

Ou essayer d'estimer puis calculer des rapports entre deux nombres supposés correspondants et de vérifier avec les autres. Par exemple le rapport 27/24 se retrouve en 45/40 mais ne convient pas pour 75/60 ni 75/100, ce qui peut conduire à la conclusion que les nombres de la deuxième suite sont plus petits que ceux de la première. Le rapport 75/100 est facilement repérable (3/4), se retrouve dans 45/60 et dans 27/36.

- Lorsque les correspondances sont déterminées :

24 36 40 60 100

? 27 ? 45 75

les deux prix manquants, en « oursins » se calculent à l'aide du rapport 3/4 ou de la règle de la « somme » :

$\frac{3}{4} \times 40 = 30$, $\frac{3}{4} \times 24 = 18$ ou $40 + 60 = 100 \Rightarrow ? + 45 = 75$, $24 + 36 = 60 \Rightarrow ? + 27 = 45$,

ce qui conduit aux 18 et 30 oursins pour les deux objets manquants, le jus de fruit et le sandwich.

Attribution des points

- 4 Réponse « 18 et 30 oursins » avec la manière dont ces nombres ont été trouvés ou avec une vérification des rapports ou de la règle de la somme en précisant que 18 et 30 oursins correspondent respectivement à 24 et 40 coquillages.
 - 3 Réponse « 18 et 30 oursins » avec explications incomplètes
 - 2 Un des deux prix « 18 ou 30 oursins » avec explication ou vérification
ou réponse « 18 et 30 oursins » sans aucune explication
ou raisonnement correct explicite avec une erreur de calcul
 - 1 Début de recherche, les deux suites ordonnées avec les correspondances, mais sans trouver les prix du jus de fruit et du sandwich
 - 0 Incompréhension du problème
-

16. DES TRUITES - FORELLEN (Cat. 7, 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Probabilités intuitives
- Arithmétique : proportionnalité, rapports

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il ne faut pas simplement comparer les nombres de truites blanches ($80 > 60$ et choisir le bassin B parce qu'elles y sont plus nombreuses) ou les nombres de truites saumonées ($140 > 100$ et choisir le bassin A car on risque moins d'y trouver des truites saumonées). L'abandon de cette conception devrait s'appuyer, par exemple, sur la constatation que, si on divise le bassin B en deux bassins de 40 truites blanches et 70 truites saumonées, les conclusions précédentes seraient inversées.
- Comprendre aussi qu'on ne peut pas se limiter à examiner les différences des nombres de truites au sein d'un même bassin (par exemple, choisir A car on y trouve 40 truites saumonées de plus que de blanches alors que la différence est de 60 dans le bassin B, favorisant les chances d'y prendre une truite saumonée), ni les variations du nombre de truites de chaque type d'un bassin à l'autre. Le rejet de ces conceptions peut, comme précédemment, s'appuyer sur des « partages » de bassins.

Comprendre qu'il faut considérer la quantité relative des truites blanches, par rapport à l'ensemble ou par rapport aux autres,

- Calculer des rapports comparables pour conclure qu'il faut choisir le bassin A,
soit car la proportion de truites blanches parmi toutes y est $60/160 = 0,375$,
alors qu'elle est de $40/110 \approx 0,364$ dans B
soit car le rapport des truites blanches sur les saumonées est $60/100 = 0,6$ dans A,
alors qu'il est $40/70 \approx 0,57$ dans B.

Ou : comparer les rapports écrits sous forme de fractions, de dénominateurs ou de numérateurs communs, par exemple : $60/100 = 3/5 = 21/35 = 12/20$ et $80/140 = 4/7 = 20/35 = 12/21$

Attribution des points

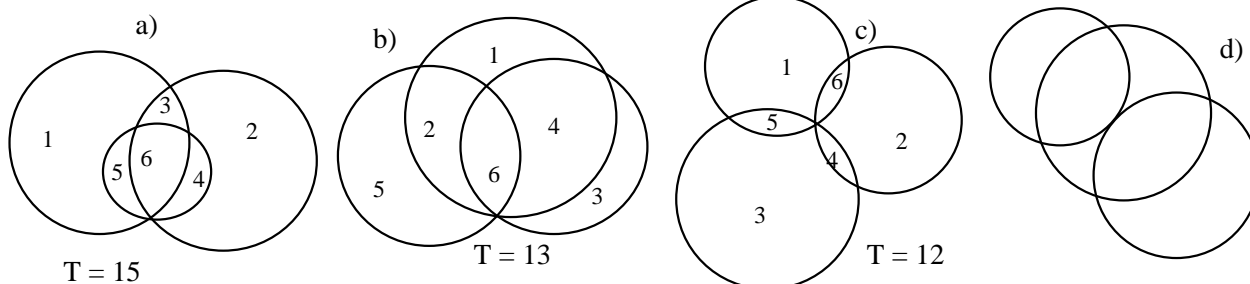
- 4 Solution juste (le bassin A) avec explications du lien entre les rapports calculés et les chances de « gagner »
 - 3 Solution juste (le bassin A) avec comparaisons entre des rapports et explications, mais sans parler des « chances de gagner »
 - 2 Solution juste (le bassin A), avec comparaison de rapports, sans aucune autre explication ou avec explications confuses
 - 1 Solution juste (le bassin A), reposant sur une comparaison erronée de différences des nombres de truites au sein d'un bassin ou des écarts entre un bassin et l'autre, avec cependant une explication de type probabiliste (on a plus de chances de ... car il y a plus de ...)
ou solution erronée (le bassin B) avec prise en compte de rapports mais due à une erreur de calcul
 - 0 Solution juste (le bassin A) avec des justifications ne prenant en compte que la comparaison des nombres d'un seul type de truite. Incompréhension du problème ou réponse fausse.
-

17. CERCLES ET NOMBRES - KREISE UND ZAHLEN (Cat. 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : combinaisons d'addition
- Géométrie : intersection de cercles et régions fermées

Analyse de la tâche

- Chercher les différentes dispositions de trois cercles en fonction des régions fermées déterminées. Ce nombre de régions peut varier de 3 (cercles sans intersections) à 7 (disposition de l'énoncé). Se rendre compte que 6 régions peuvent être obtenues par une des quatre dispositions suivantes « topologiquement » différentes :
 - a) 1 région commune aux trois cercles, 3 régions communes à deux cercles et 2 régions n'appartenant qu'à un cercle
 - b) 1 région commune aux trois cercles, 2 régions communes à deux cercles et 3 régions n'appartenant qu'à un cercle
 - c) 0 région commune aux trois cercles, 3 régions communes à deux cercles et 3 régions n'appartenant qu'à un cercle
 - d) 0 région commune aux trois cercles, 2 régions communes à deux cercles et 4 régions n'appartenant qu'à un cercle



- Se rendre compte que la disposition d) ne permet pas d'obtenir la même somme dans chaque cercle.
- Observer qu'il y a dans chaque autre disposition un, deux ou trois cercles qui contiennent trois régions et que, par conséquent, la somme des nombres pour ces cercles ne peut être supérieure à 15 (6 + 5 + 4)
- Comprendre que pour obtenir une somme maximale, il faut tenter de placer le 6 dans la région commune aux trois cercles, en a) et b) pour qu'il apparaisse dans trois sommes, et dans une des régions communes à deux cercles dans c) pour qu'il apparaisse dans deux sommes.

Pour les autres nombres, il faudrait aussi s'inspirer de ce même principe selon lequel, pour obtenir les plus grandes sommes, il faut utiliser le plus souvent possible les nombres 4, 5 et 6

- Dans la disposition a), tenter de placer 6 dans la région commune aux trois cercles, puis 4 et 5 dans les deux régions communes à deux cercles, du cercle « central ». La somme de 15 s'obtient facilement dans les deux autres cercles en y plaçant les nombres 3 dans leur région commune, puis 2 et 1 dans les régions « extérieures ». (On peut obtenir une solution « symétrique par permutation de 4 et 5, respectivement de 1 et 2).
- Dans la disposition b), après avoir placé 6 dans la région commune aux trois cercles, on se rend compte rapidement que la somme de 15 pour les trois cercles ne pourra pas être obtenu et que le maximum est 13.
- Dans la disposition c) le maximum s'obtient en plaçant 6, 5 et 4 dans les trois régions communes à deux cercles, mais la somme maximale n'est que 12.

Attribution des points

- 4 Solution maximale (15) avec justification sur les différentes dispositions des cercles et sur la manière d'y placer les nombres (le 6 dans les zones communes ou les différentes sommes possibles, ...)
- 3 Solution maximale (15) avec justification incomplète ou par essais successifs
ou solution non maximale (13) selon la disposition b) ou (12) selon c) avec justification complète
- 2 Solution maximale (15) sans justification
ou solution non maximales (13) ou (12) selon la disposition b) ou c) avec justification incomplète
- 1 Solution ne respectant pas l'égalité des sommes
- 0 Incompréhension du problème, ...

18. LA FANFARE DE CARNAVAL - DIE MUSIK-KAPELLE (Cat. 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : multiplication et division, multiples et diviseurs

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé et comprendre que, lorsqu'un musicien quitte le défilé, le rang dans lequel il était devient incomplet et qu'il faut donc modifier le nombre de personnes par rang pour que tous soient à nouveau complets.
- Comprendre que si les rangs de 3, puis 4, puis 5, et puis 6 sont tous complets, le nombre total de musiciens restants est successivement, un multiple de 3, de 4, de 5 et de 6 et que, simultanément, les séquences cherchées se composent de quatre nombres consécutifs, dans l'ordre décroissant.

Chercher d'abord des multiples de 3 supérieurs à 78 qui valent un de plus qu'un multiple de 4, (à la suite du départ du musicien qui a mal aux pieds), et en vérifiant si le nombre diminué de 1 est un multiple de 4 : 78 : non ; 81 : oui ; 84 : non ; 87 : non, 90 : non ; 93 : oui 96 : non, 99 : non, etc.

Constater ainsi que les différentes possibilités se retrouvent de 12 en 12 :

(81 ; 80 ... ; ...), (93 ; 92 ; ... ; ...), (105 ; 104 ; ... ; ...), (117 ; 116 ; ... ; ...), (129 ; 128 ; ... ; ...), (141 ; 140 ; ... ; ...), ...

- Parmi les séquences précédentes chercher celles dont les multiples de 4 valent un de plus qu'un multiple de 5 (à la suite du départ de celui qui meurt de soif) et constater qu'une seule convient, avec un multiple de 4 se terminant par 6 : ... (117 ; 116 ; 115 ; ...),
- Vérifier que le quatrième nombre de la séquence retenue est un multiple de 6.

Ou : comprendre que le nombre cherché doit être compris entre 78 (26×3) et 147 ($24 \times 6 + 3$). Puis répondre successivement aux autres conditions : les multiples de 3 moins 1 doivent être des multiples de 4, qui doivent devenir multiples de 5 lorsqu'on enlève 1, etc. On peut alors utiliser une stratégie du genre du crible d'Eratosthène : écrire tous les multiples de 3 possibles : 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99, 102, 105, 108, 111, 114, 117, 120, 123, 126, 129, 132, 135, 138, 141, 144 ; de ces 23 multiples ne conserver que les 6 qui sont précédés d'un multiple de 4 (nombres impairs de la forme $4m + 1$) : 81, 93, 105, 117, 129, 141, puis ne conserver que ceux qui valent 2 de plus qu'un multiple de 5. Il n'y a plus qu'une possibilité : 117, qui, diminué de 3 donne un multiple de 3, pair, c'est-à-dire un multiple de 6.

Attribution des points

- 4 Réponse « 117 » avec justifications : séquence (117 ; 116 ; 115 ; 114), vérification de l'unicité
 - 3 Réponse « 117 » avec explications incomplètes, sans vérification de l'unicité, ...
 - 2 Réponse 57 ... et/ou 117 avec explications (sans contrôle des conditions sur le nombre de rangs)
 - 1 Début de recherche cohérente
 - 0 Incompréhension du problème
-

19. FAMILLE NOMBREUSE - EINE GROBE FAMILIE (Cat. 8)**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

- Arithmétique : fractions
- Combinatoire : approche de la notion de probabilité

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il faut vérifier l'affirmation « une chance sur deux », qui correspond bien au cas spécifique du village mais doit être examinée dans le cas général
- Déterminer les différentes compositions des familles de trois enfants : 3 garçons, 2 garçons et une fille, 1 garçon et deux filles, 3 filles, mais remarquer que ces quatre compositions n'ont pas autant de chances d'arriver les unes que les autres : par exemple, parmi les familles de 2 garçons et une fille, il faut distinguer 3 situations : f-g-g, g-f-g et g-g-f, alors que pour les familles n'ayant que des garçons, il n'y a qu'une possibilité : g-g-g.
- Dresser un inventaire de toutes les compositions possibles des familles de trois enfants, enfant par enfant, à l'aide d'un diagramme en arbre, d'un tableau ou d'une autre représentation. On obtient ainsi 8 situations ayant les mêmes chances de se produire, puisqu'on a autant de chances d'avoir une fille ou un garçon: f-f-f ; f-f-g ; f-g-f ; f-g-g ; g-f-f ; g-f-g ; g-g-f ; g-g-g et constater que dans 6 cas sur 8, la famille a au moins un garçon et au moins une fille.
- Considérer que la situation du village ne correspond pas à la distribution précédente et qu'elle est due au hasard, en attribuant le décalage aux dimensions réduites de l'échantillon.
- Conclure que l'expression « une chance sur deux » est inadéquate comme prévision et qu'elle devrait être remplacée par « 6 chances sur 8 » ou « 3 chances sur 4 » et que A. et B. peuvent « espérer mieux » vu que $6/8 > 1/2$

Attribution des points

- 4 Réponse correcte et complète (A et B peuvent « espérer mieux » ; la prévision « une chance sur deux » est due au fait que le village est trop petit pour en tirer cette généralisation ; il faudrait la remplacer par « 6 chances sur 8 » ou « 3 chances sur 4 » ...) avec une identification des 8 compositions et la remarque que $6/8 > 1/2$
 - 3 Réponse correcte mais incomplète (où il manque la remarque que $6/8 > 1/2$ ou « le village est trop petit » ...)
 - 2 Réponse très partielle du genre A et B peuvent espérer mieux ou « une chance sur deux » ne convient pas, avec inventaire mais sans argumentation
 - 1 Réponse comme précédemment mais sans inventaire ni explications
ou erreur due à une analyse insuffisante des compositions de familles (inventaire en quatre catégories, sans tenir compte de l'ordre des enfants (A et B ne peuvent pas « espérer mieux » ; la prévision « une chance sur deux » est juste)
 - 0 Incompréhension du problème
-